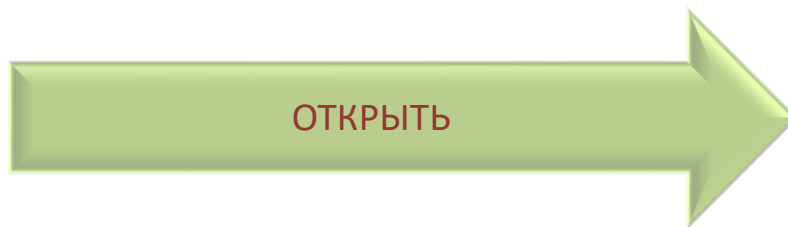


ИНТЕЛЛЕКТ-КАРТА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ и ЕГЭ

ВЕРСИЯ R24

<http://www.workingmemory.ru/>







ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

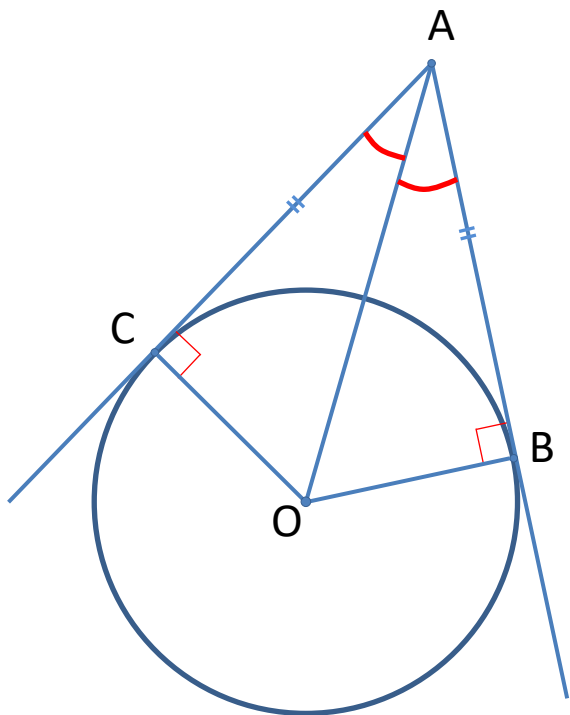
Последовательность	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Рекуррентная формула	$a_n = a_{n-1} + d$	$b_n = b_{n-1} \cdot q$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d(n - 1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма первых n членов прогрессии	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$
Основное свойство	$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$ b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$
Расчет разности/знаменателя	$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$	$q^{m-n} = \frac{b_m}{b_n}$

d – разность арифметической прогрессии;

q – знаменатель геометрической прогрессии.

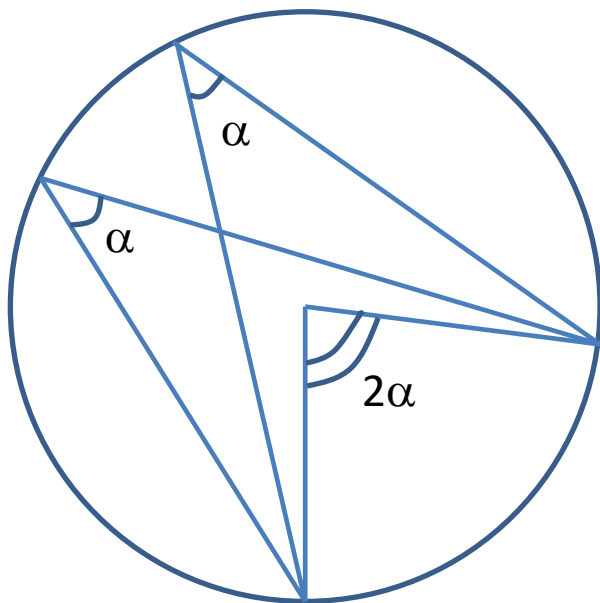


КАСАТЕЛЬНЫЕ, ПРОВЕДЕННЫЕ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ



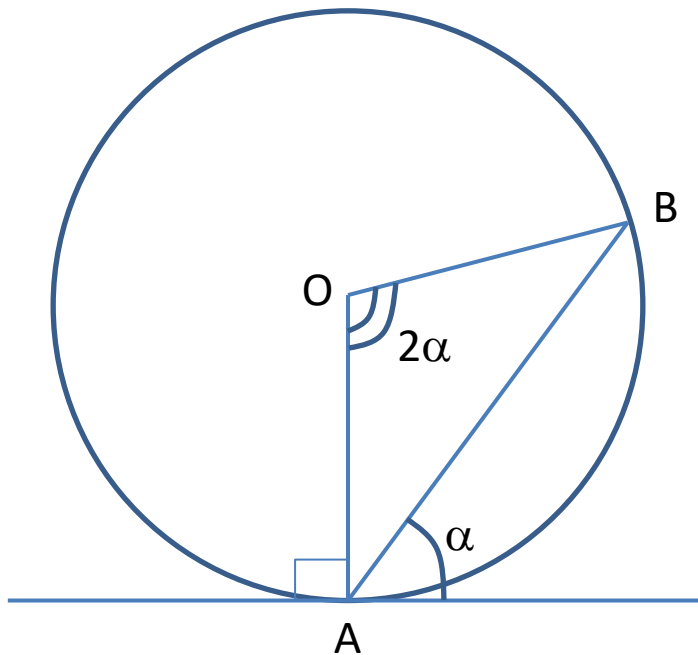
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны: $AC = AB$, центр окружности O лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$.

ВПИСАННЫЙ УГОЛ



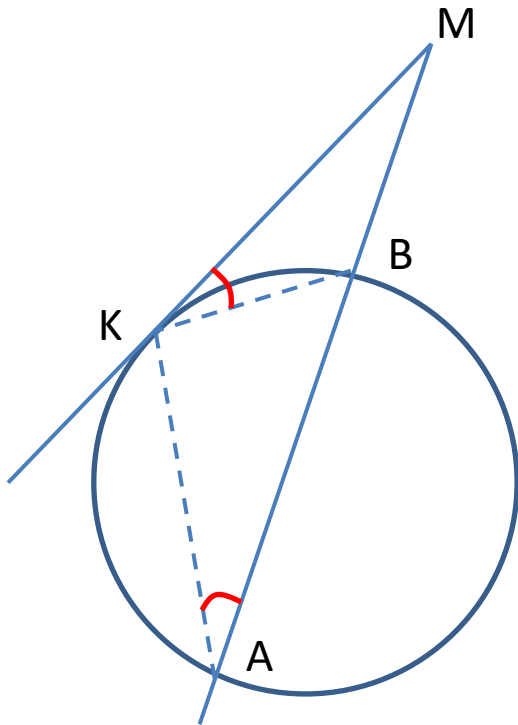
Вписанный угол равен половине центрального (половине угловой меры дуги, на которую он опирается).

УГОЛ МЕЖДУ ХОРДОЙ И КАСАТЕЛЬНОЙ



Угол между хордой и касательной, имеющих общую точку A , равен половине угловой меры дуги $\widehat{AB}$, заключенной между ними.

КВАДРАТ КАСАТЕЛЬНОЙ



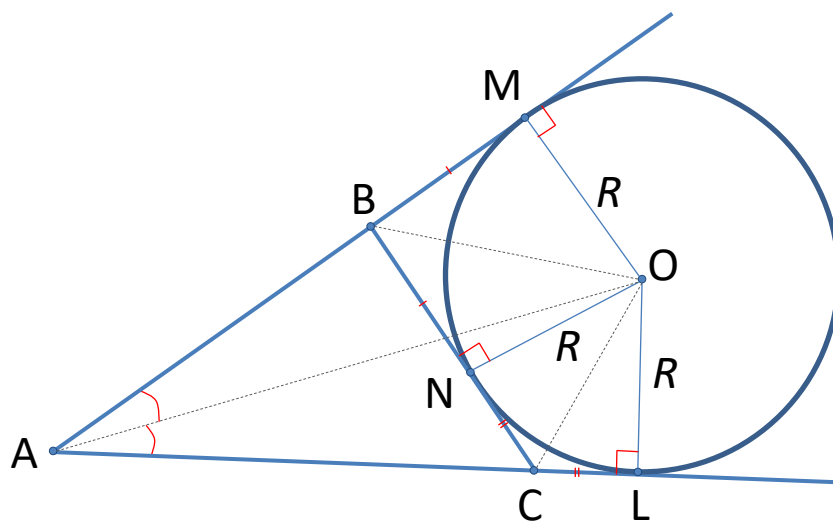
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$KM^2 = MB \cdot MA$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \angle KAB &= \angle BKM \Rightarrow \triangle MKB \sim \triangle MAK \Rightarrow \\ \frac{KM}{MB} &= \frac{MA}{KM} \Rightarrow KM^2 = MB \cdot MA \end{aligned}$$

ВНЕВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

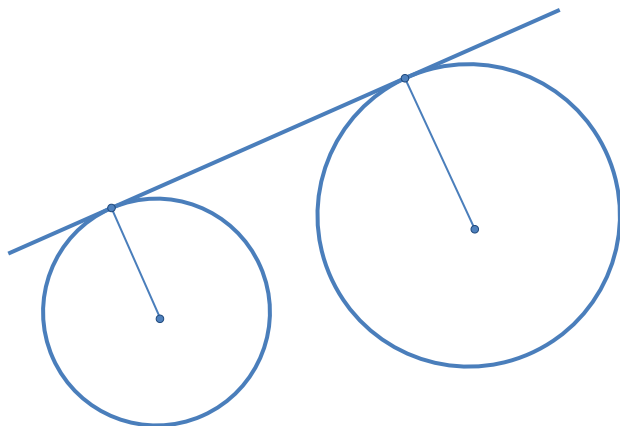


$$p = \frac{AB + AC + BC}{2}$$

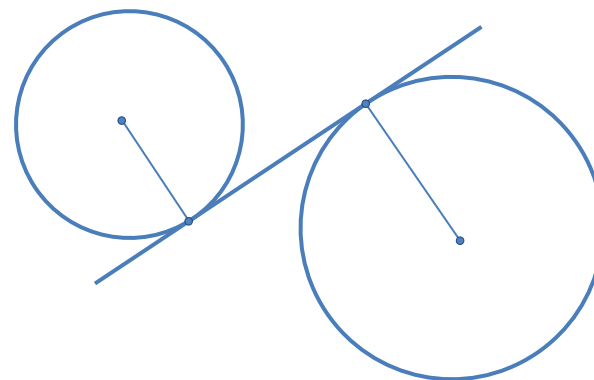
$$AL = AM = p$$

$$S_{ABC} = (p - BC) \cdot R$$

ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ



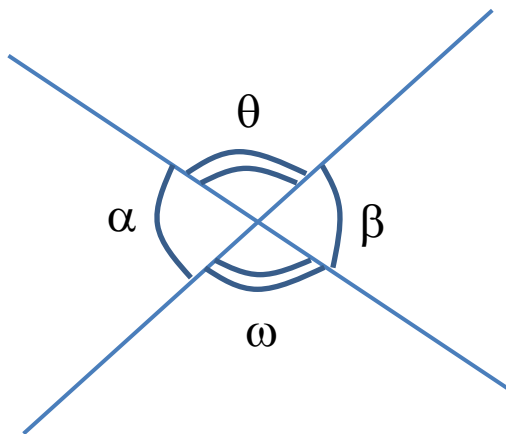
Внешняя касательная
к двум окружностям



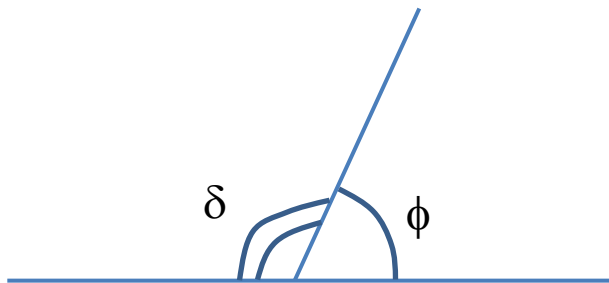
Внутренняя касательная
к двум окружностям



СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ



Вертикальные углы равны: $\omega = \theta$, $\beta = \alpha$



Сумма смежных углов равна 180° : $\phi + \delta = 180^\circ$

$$\sin \delta = \sin \phi$$

$$\cos \delta = -\cos \phi$$

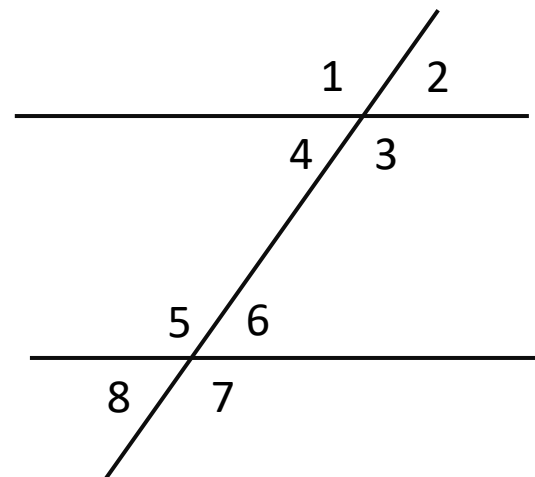
$$\operatorname{tg} \delta = -\operatorname{tg} \phi$$

$$\operatorname{ctg} \delta = -\operatorname{ctg} \phi$$

Косинус, тангенс и котангенс тупого угла отрицательны!

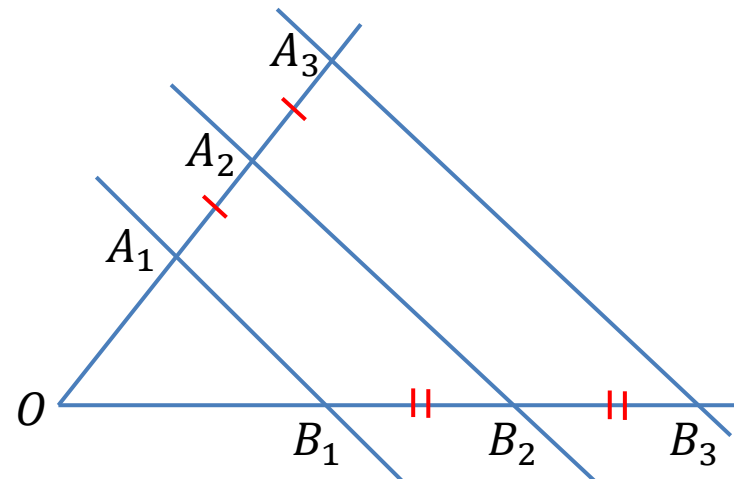
ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ И СЕКУЩАЯ

- ✓ Накрест лежащие углы (3 и 5, 4 и 6) равны.
- ✓ Сумма односторонних углов (4 и 5, 3 и 6) равна 180° .
- ✓ Соответственные углы (1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7) равны.



ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков ($A_1A_2 = A_2A_3$) и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки ($B_1B_2 = B_2B_3$).

**Обобщённая теорема Фалеса:**

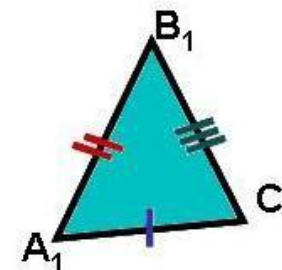
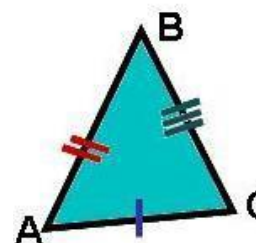
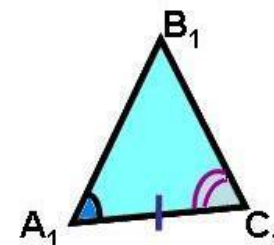
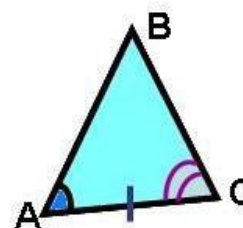
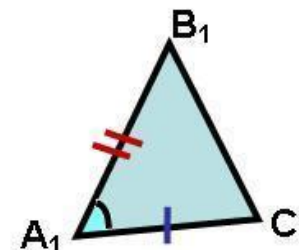
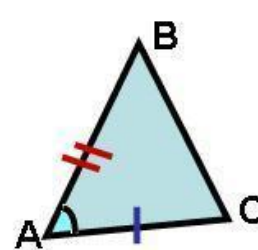
Параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$$



ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

2. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны:

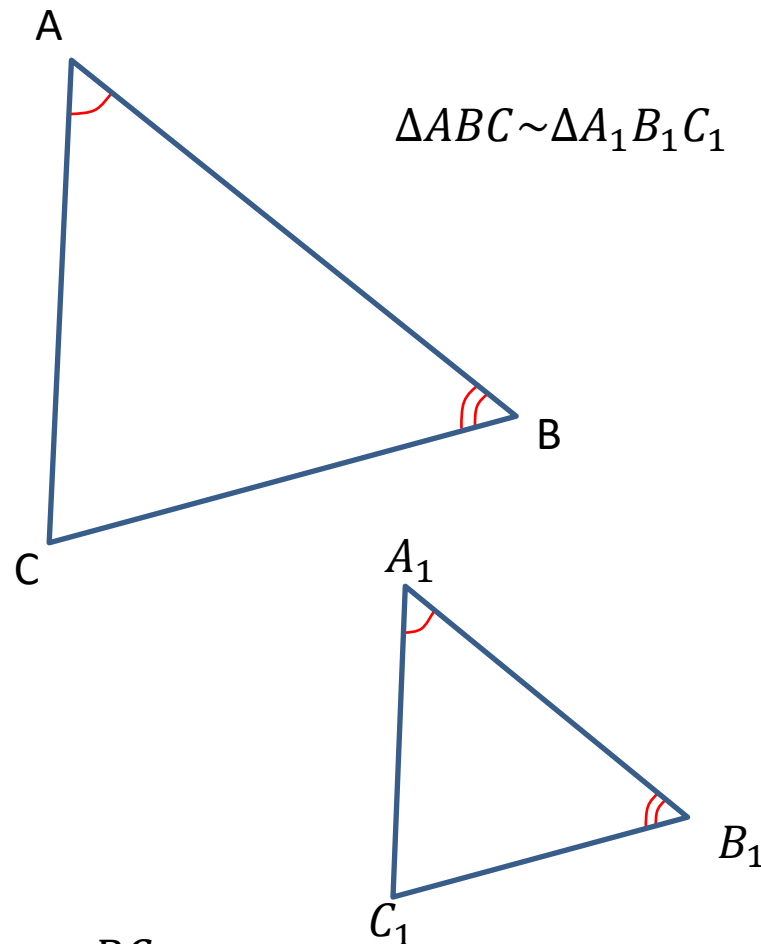
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1.$$

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны:

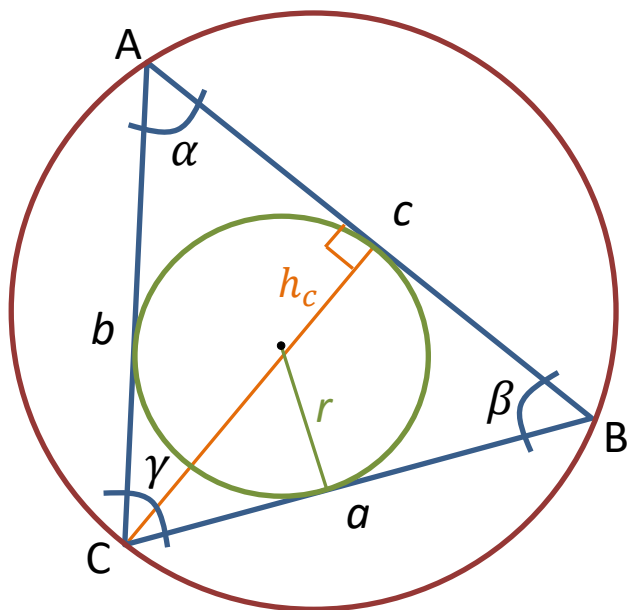
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

У подобных треугольников
отношения соответственных
сторон равны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$



СТОРОНЫ И ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – полупериметр

R – радиус описанной окружности

r – радиус вписанной окружности

Пять формул площади треугольника:

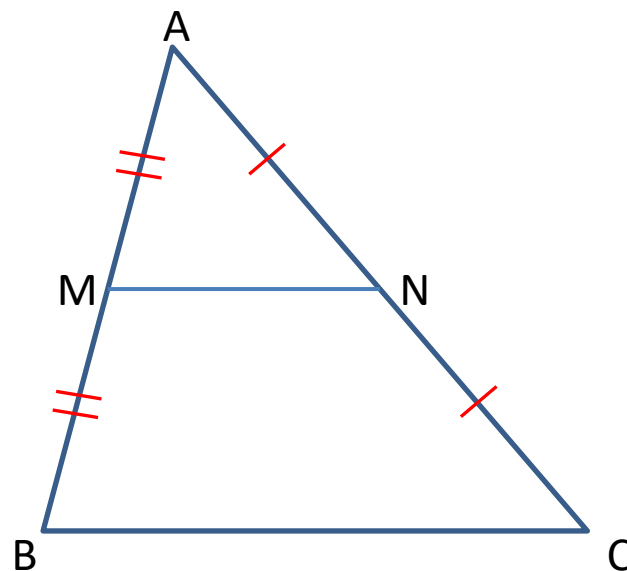
$$S = \frac{1}{2} h_c c = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины его сторон.

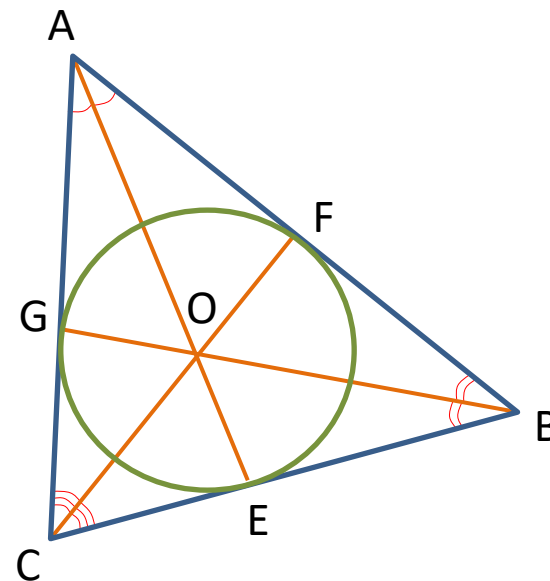
Средняя линия параллельна основанию ($MN \parallel BC$) и равна его половине:

$$MN = \frac{BC}{2}$$



БИССЕКТРИССЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

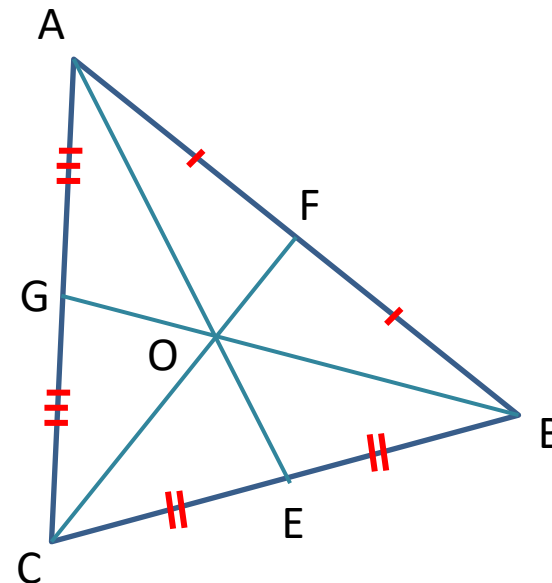
- Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам.
- Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной.
- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.
- Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника.



$$\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB}$$

МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

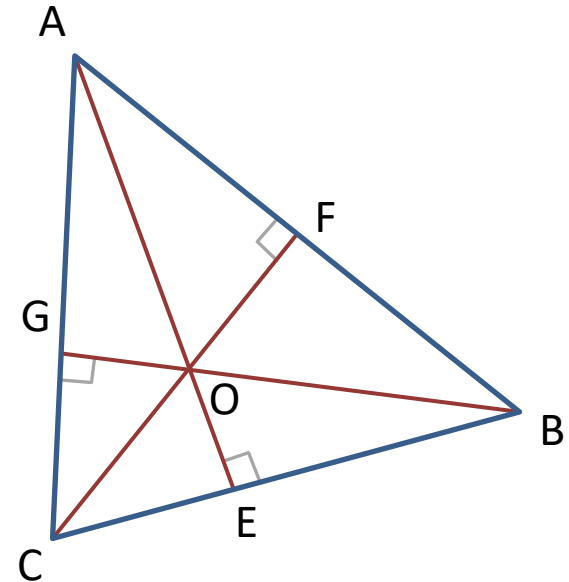
- Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке O , являющейся центром тяжести треугольника
- Точкой O медианы делятся на отрезки в отношении 2: 1 (считая от вершины).



$$\frac{CO}{OF} = \frac{BO}{OG} = \frac{AO}{OE} = \frac{2}{1}$$

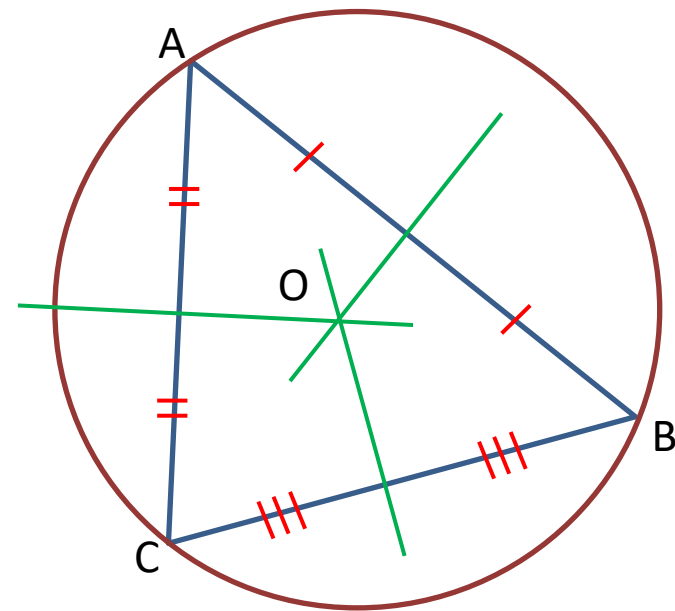
ВЫСОТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке O , называемой ортоцентром.
- В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника.
- В прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла.



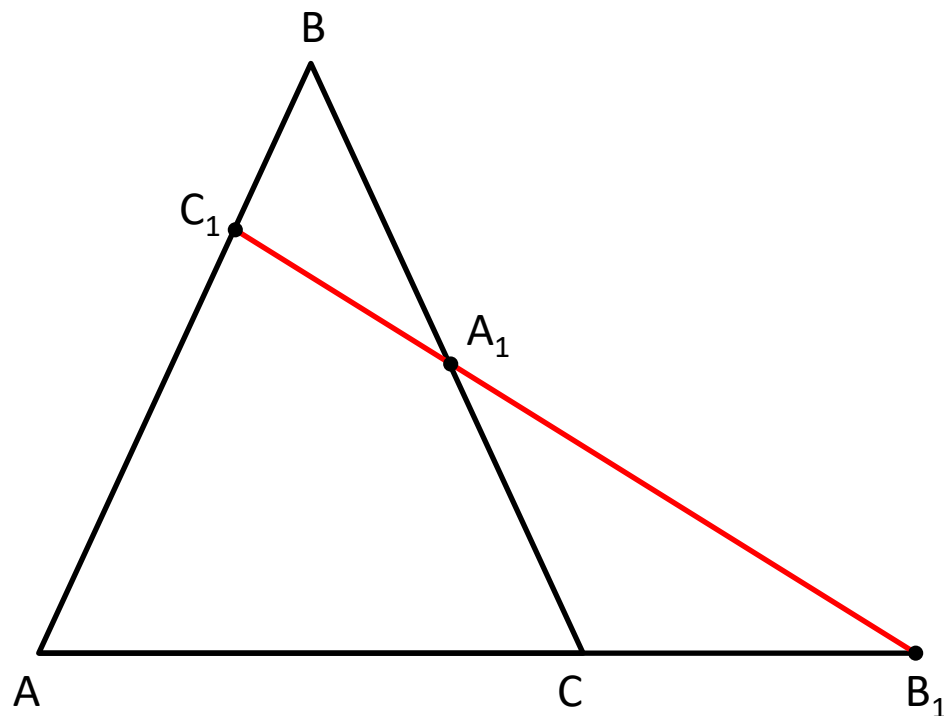
СЕРЕДИННЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.



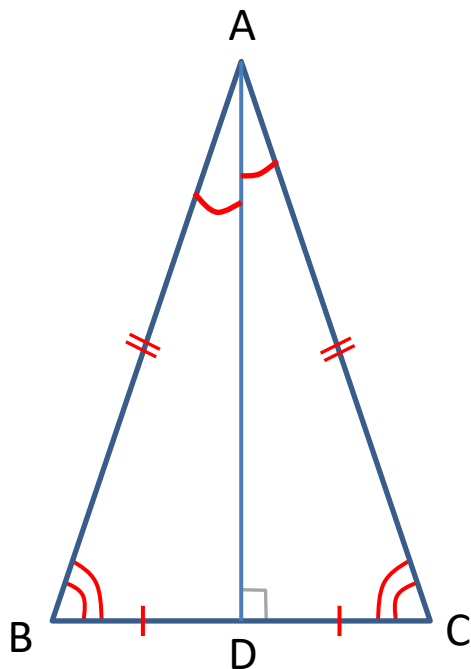
ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$



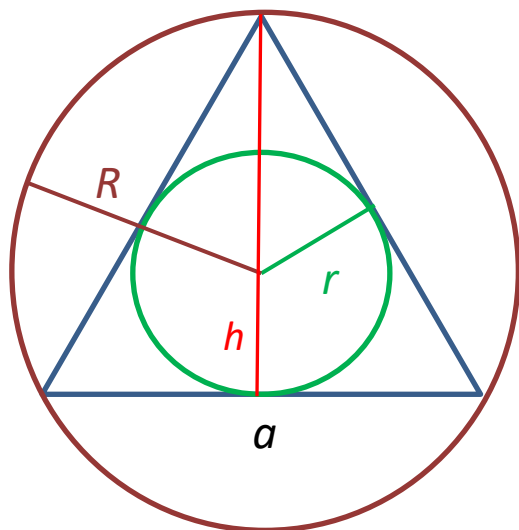


РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



- Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого две стороны (боковые стороны) равны.
- Медиана (AD), проведенная к основанию (BC) является биссектрисой и высотой.
- Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Равносторонний треугольник – треугольник, у которого все стороны равны.

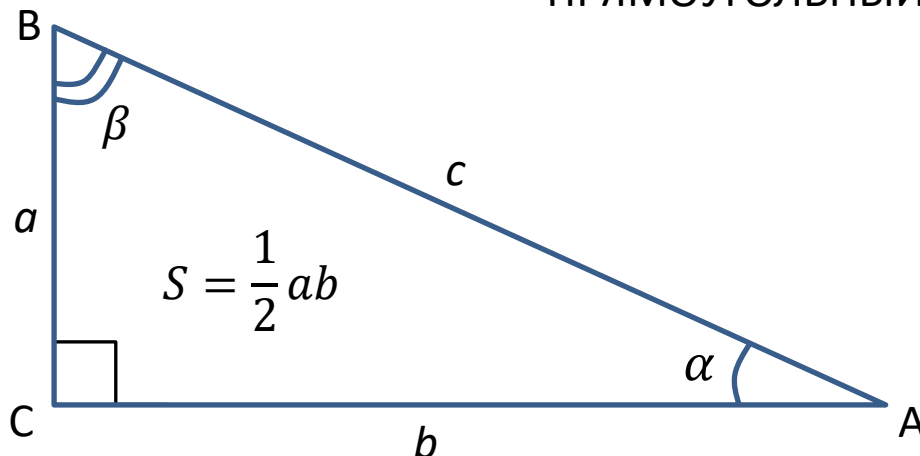
Все углы равностороннего треугольника по 60° .

Медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке – центре вписанной и описанной окружностей.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad R = 2r$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}h = 2r \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}h = \frac{R}{2}$$

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Теорема Пифагора:
квадрат гипотенузы равен сумме
квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Синус – отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Тангенс – отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс – отношение прилежащему катета к противолежащему.

Гипотенуза – диаметр
окружности, описанной около
прямоугольного треугольника

$$\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{tg} \beta$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

φ	30°	45°	60°
	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sin φ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos φ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg φ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg φ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos A = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\sin A = a \Rightarrow \cos A = \sqrt{1 - (\sin A)^2}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cos A = a \Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - (\cos A)^2}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

ВЫСОТА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

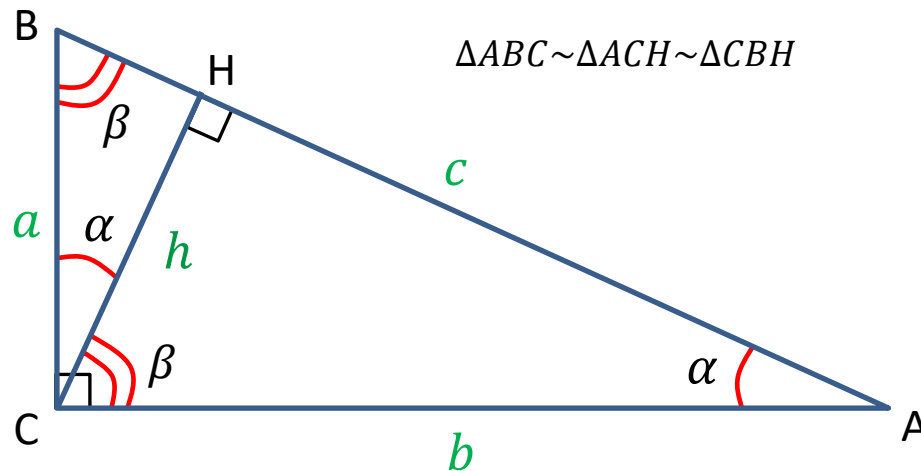
$$CH^2 = AH \cdot BH$$

Квадрат высоты равен
произведению отрезков, на
которые она разбивает
гипотенузу

$$BC^2 = BH \cdot BA$$

$$AC^2 = AH \cdot AB$$

Квадрат катета равен
произведению гипотенузы на
проекцию этого катета на
гипотенузу



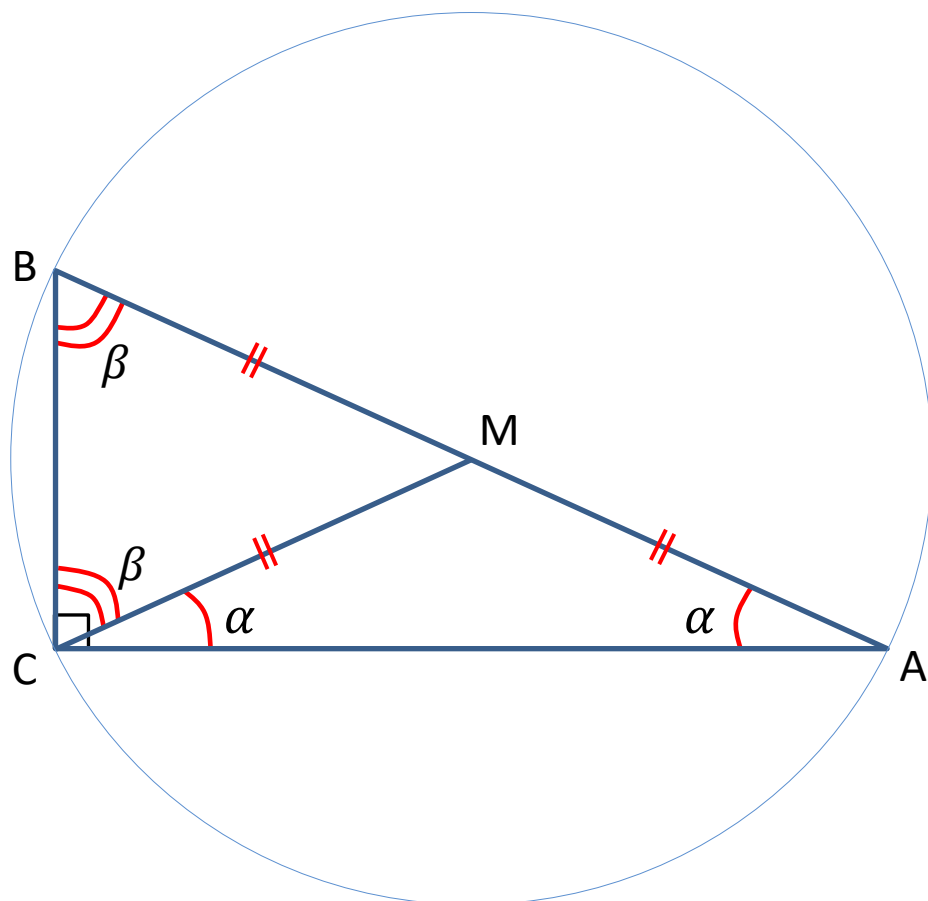
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CA = \frac{1}{2} CH \cdot AB$$

$$BC \cdot CA = CH \cdot AB$$

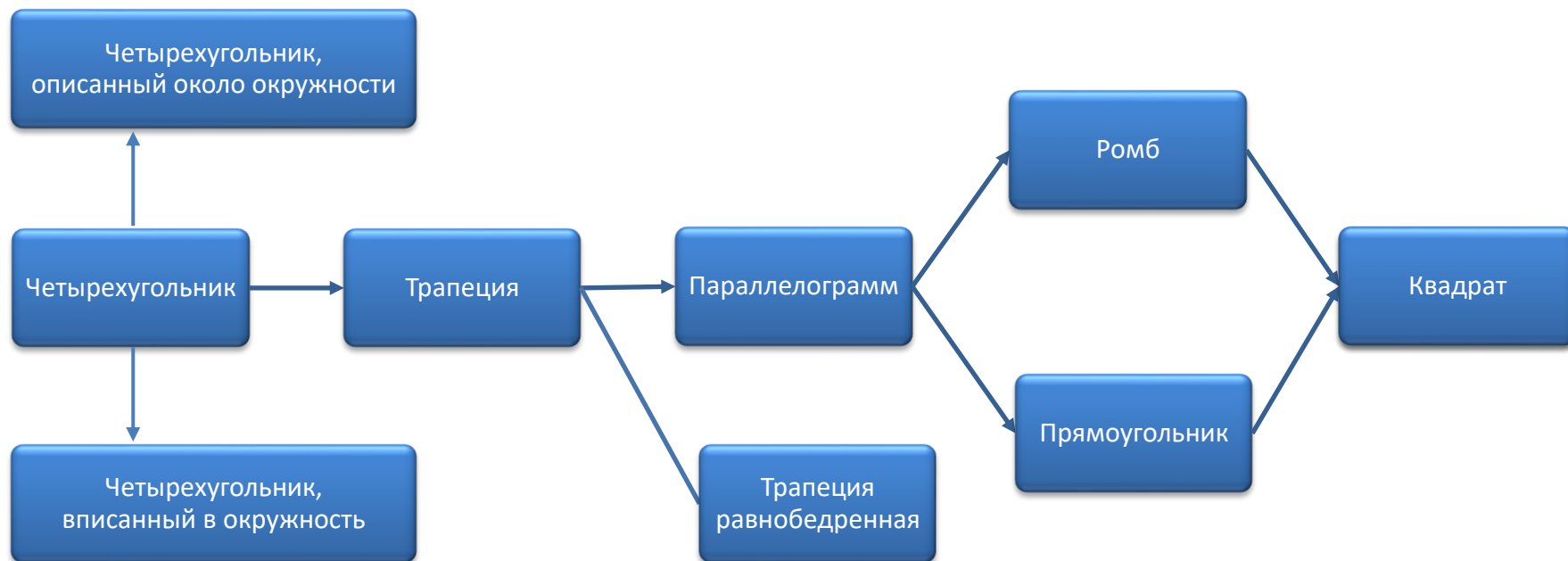
$$a \cdot b = c \cdot h$$

Произведение катетов равно произведению
гипотенузы на высоту

МЕДИАНА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Середина гипотенузы
является центром описанной
окружности



ТРАПЕЦИЯ

Трапеция – четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами.

Средняя линия — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

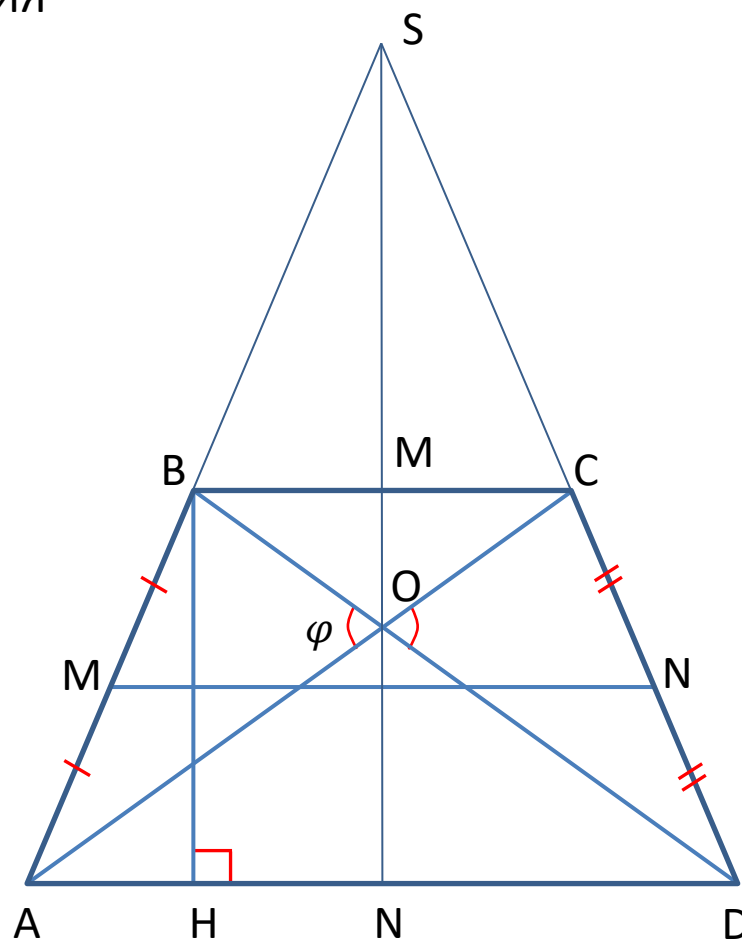
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

Равнобедренная трапеция – трапеция, у которой боковые стороны равны: $AB = CD$.

Площадь трапеции :

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$$



Точка пересечения диагоналей любой трапеции (O), точка пересечения продолжений боковых сторон (S) и середины оснований (M, N) лежат на одной прямой

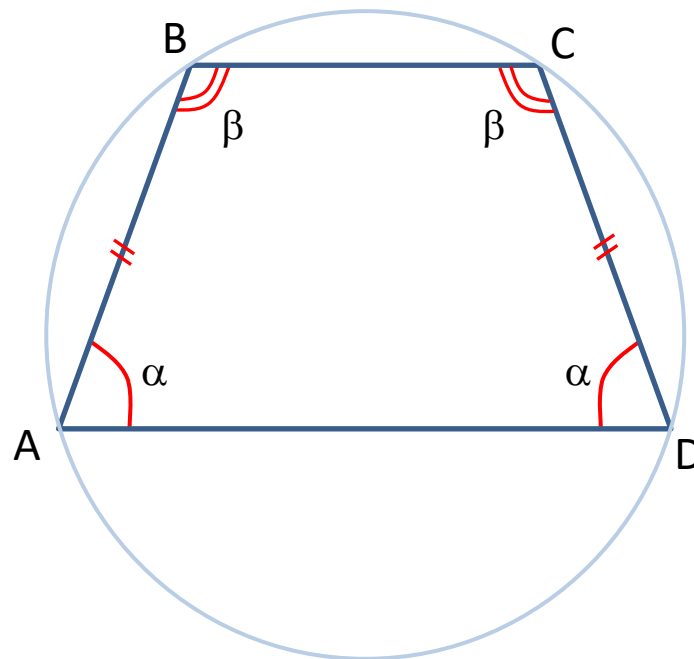
РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

Равнобедренная трапеция – [трапеция](#), у которой боковые стороны равны: $AB = CD$.

Углы при основании равнобедренной трапеции равны: $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$.

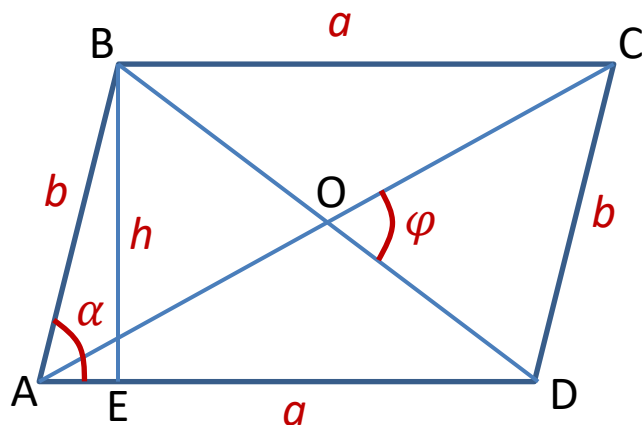
Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.

Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



Параллелограмм это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

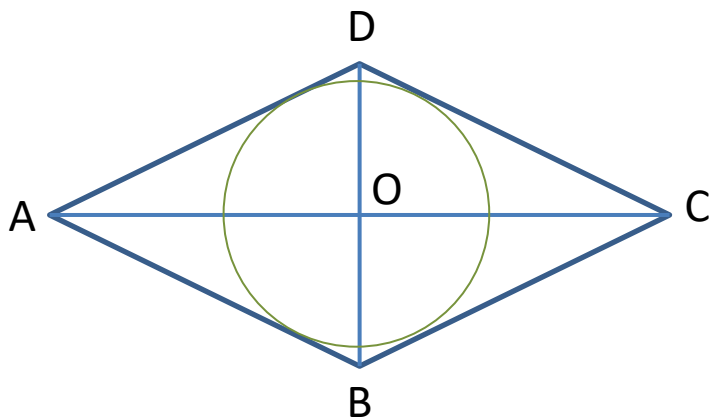
$$AC = d_1, BD = d_2$$

$$\angle BAD = \alpha, \angle COD = \varphi$$

- Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB = CD$, $AD = BC$.
- Противоположные углы параллелограмма равны: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
- Сумма односторонних углов равна 180° : $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$.
- Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: $AO = OC$, $BO = OD$.
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов его двух смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

$$S = ha = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

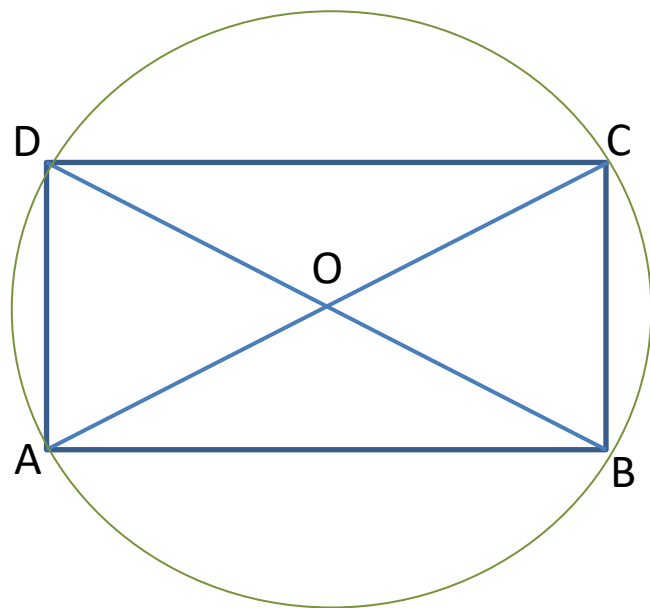
РОМБ



- **Ромб** — это четырехугольник, у которого все стороны равны.
- **РОМБ ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.**

- Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.
- Диагонали ромба делят его углы пополам.
- В ромб можно вписать окружность.
- Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

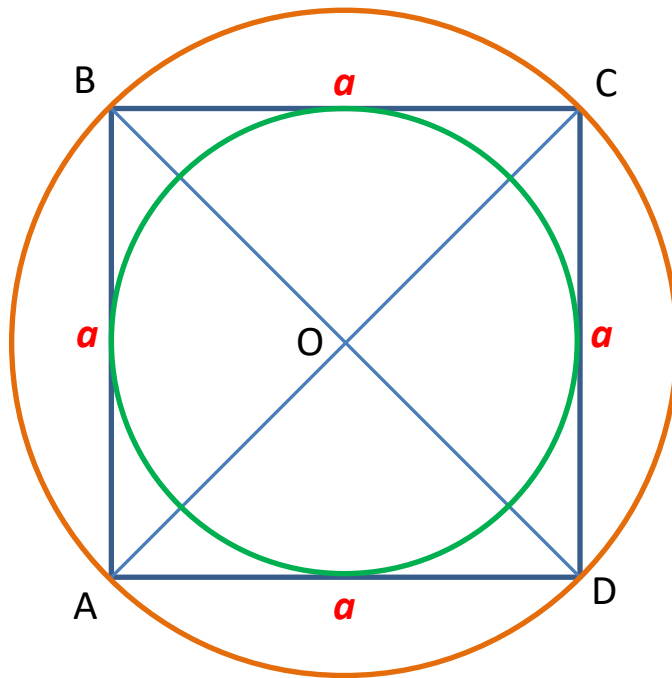
ПРЯМОУГОЛЬНИК



- Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые (равны 90°).
- **ПРЯМОУГОЛЬНИК ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.**

- Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
- Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$.
- Около прямоугольника можно описать окружность.

КВАДРАТ



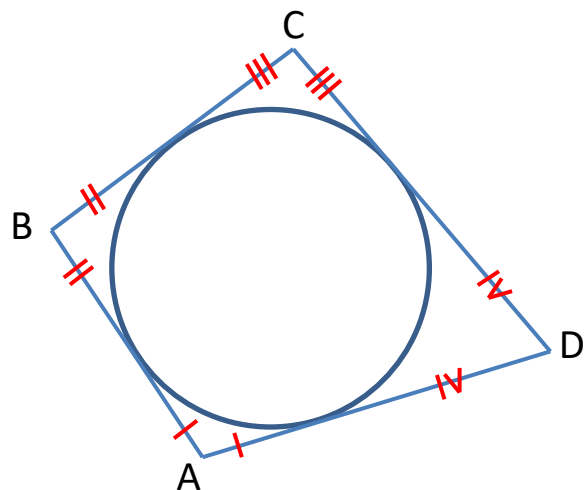
- Квадрат – правильный четырехугольник, у которого все стороны равны и все углы равны (по 90°).
- **КВАДРАТ ОБЛАДАЕТ ВСЕМИ СВОЙСТВАМИ РОМБА И ПРЯМОУГОЛЬНИКА.**

$$S = a^2$$

$$r = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ОКРУЖНОСТИ

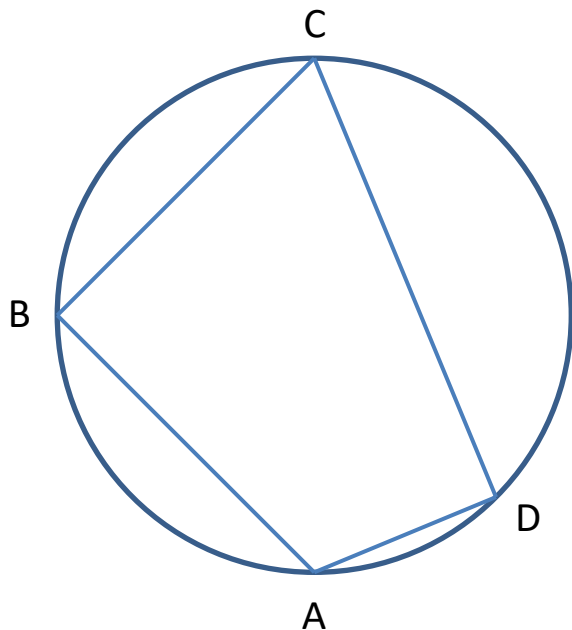


В четырехугольник тогда и только тогда можно вписать окружность, когда суммы противоположных сторон одинаковы *и равны половине периметра* четырехугольника:

$$AB + CD = BC + AD = \frac{1}{2}P, \text{ где}$$

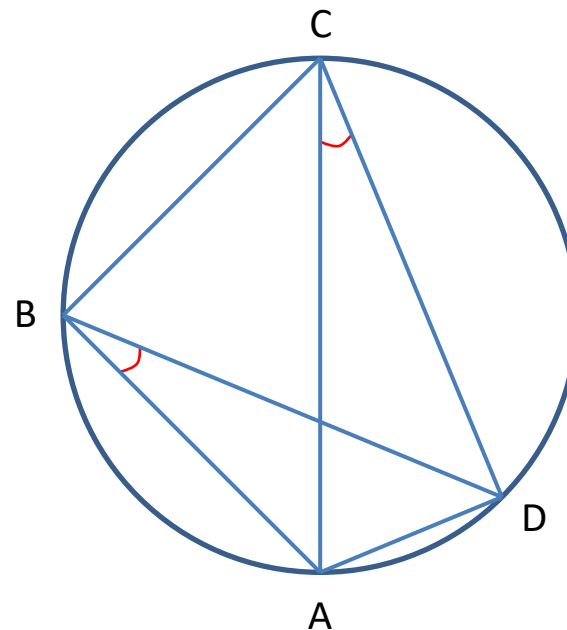
$$P = AB + BC + CD + DA$$

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ



Четырехугольник тогда и только тогда можно вписать в окружность, когда суммы противоположных углов равны 180° :

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$$



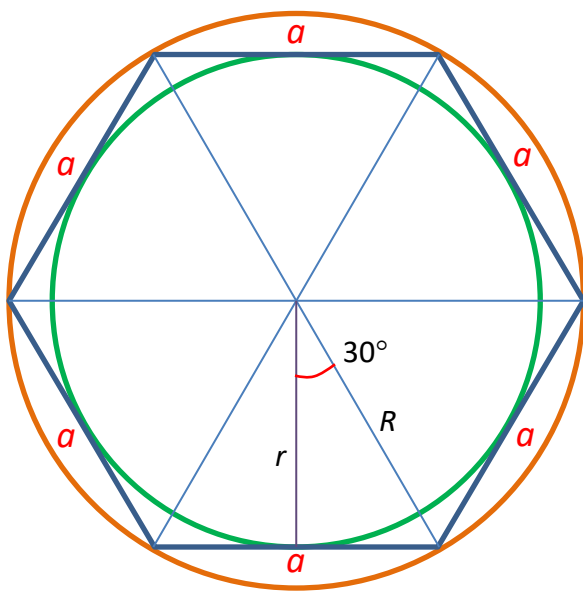
Если связанные углы* равны, то около четырехугольника можно описать окружность:

$$\angle ABD = \angle ACD$$

*углы, опирающиеся на один отрезок



ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК



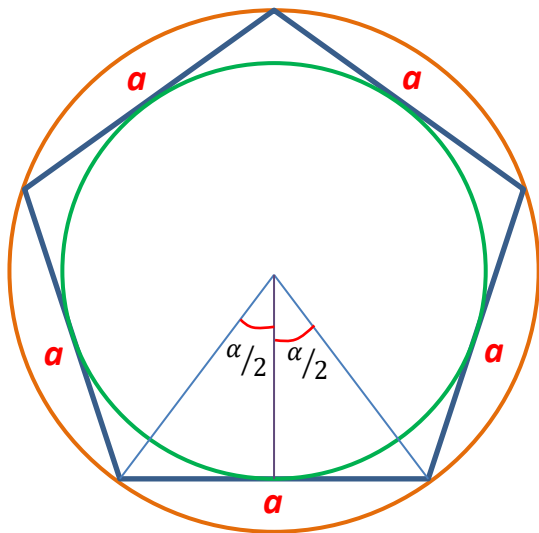
- Правильный шестиугольник – шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы по 120° .
- Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников.

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

ПРАВИЛЬНЫЙ n-УГОЛЬНИК



- Правильный n-угольник состоит из n равнобедренных треугольников с углом $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ при вершине.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

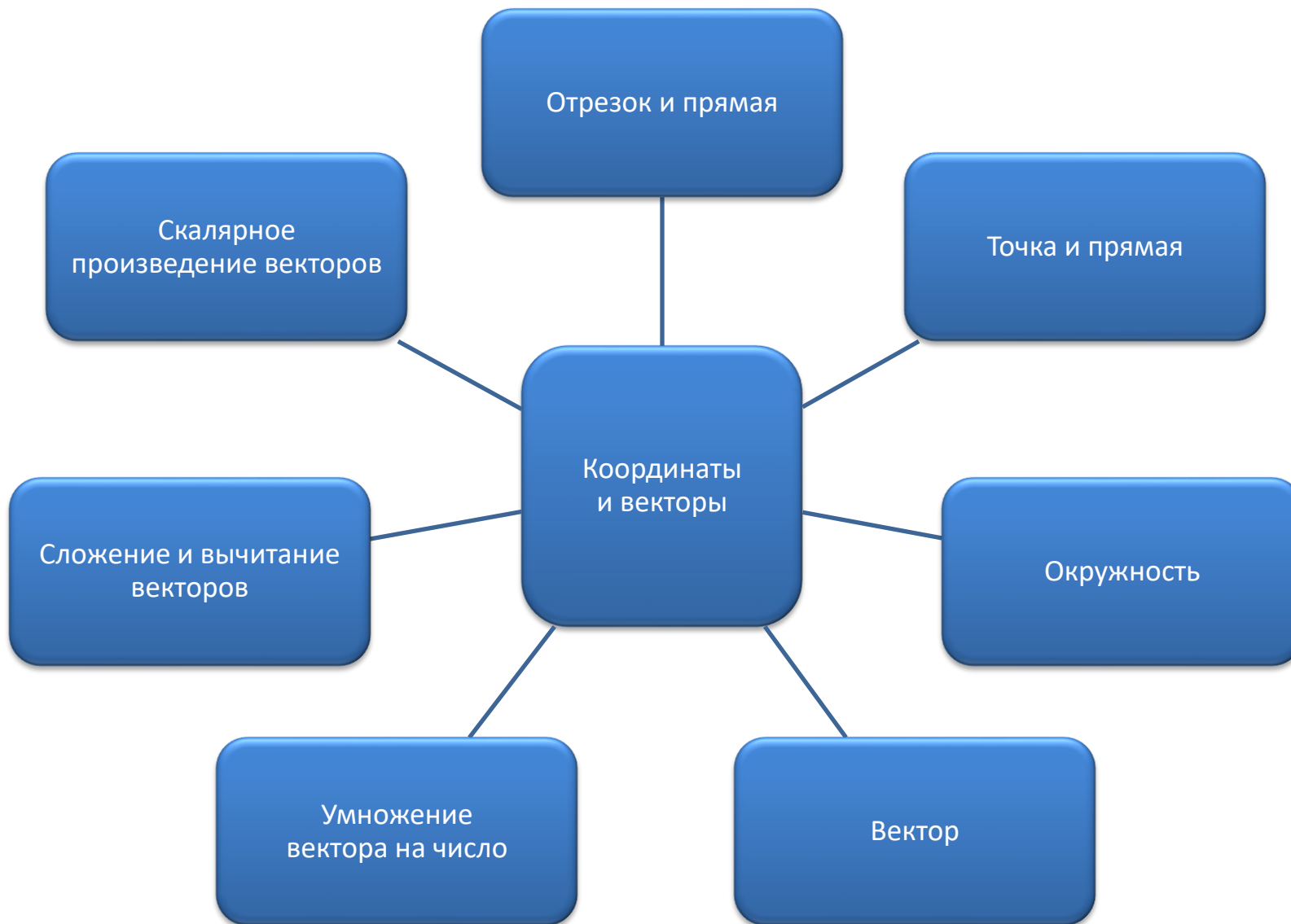
$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

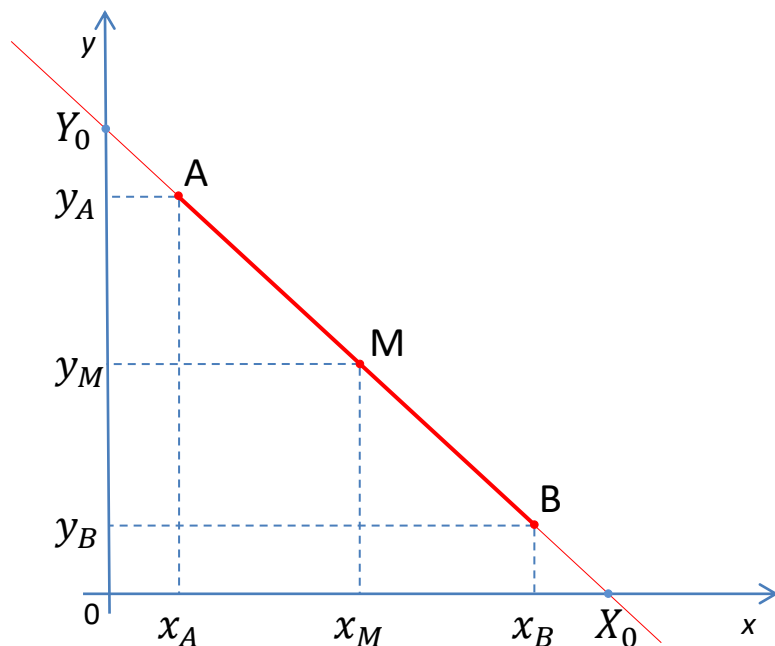
$$p = na$$

$$S = n \cdot \left(\frac{1}{2} ar\right) = \frac{1}{2} pr$$

Правильный n-угольник служит основанием правильной призмы и правильной пирамиды.



ОТРЕЗОК И ПРЯМАЯ



Длина отрезка:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Середина отрезка:

$$x_M = \frac{x_B + x_A}{2}, y_M = \frac{y_B + y_A}{2}.$$

Уравнение прямой по двум точкам:

$$\frac{x_B - x}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y}{y_B - y_A}$$

Каноническое
уравнение прямой:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

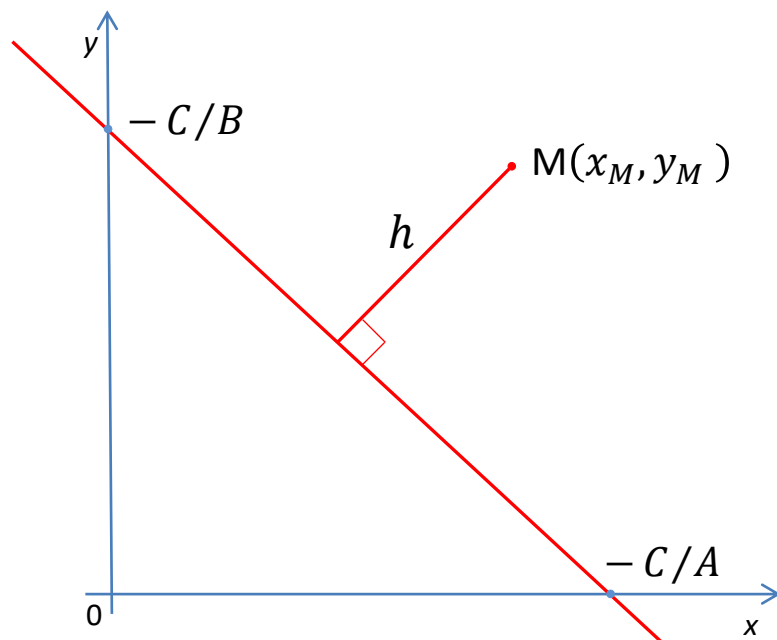
Уравнение прямой
в отрезках:

$$\frac{x}{X_0} + \frac{y}{Y_0} = 1$$

Уравнение прямой
с угловым коэффициентом:

$$y = k \cdot x + a$$

ТОЧКА И ПРЯМАЯ



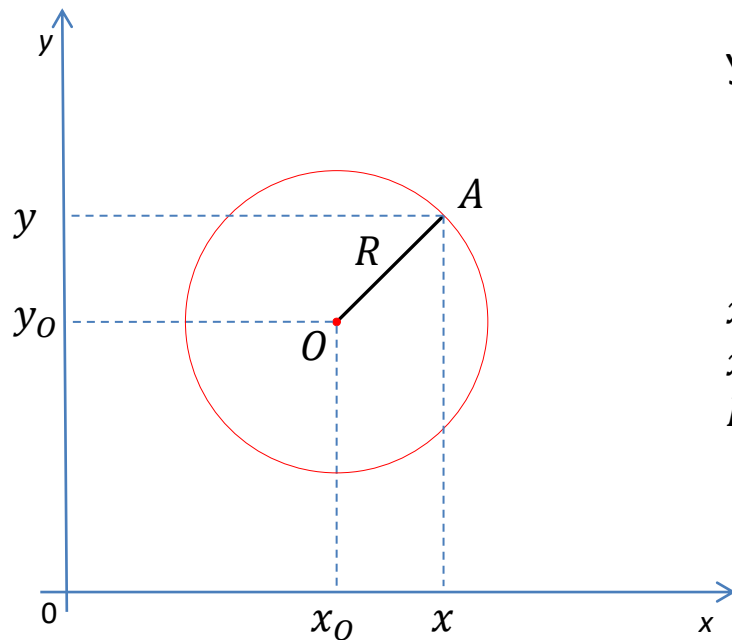
Уравнение прямой:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

Расстояние от точки до прямой:

$$h = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ОКРУЖНОСТЬ

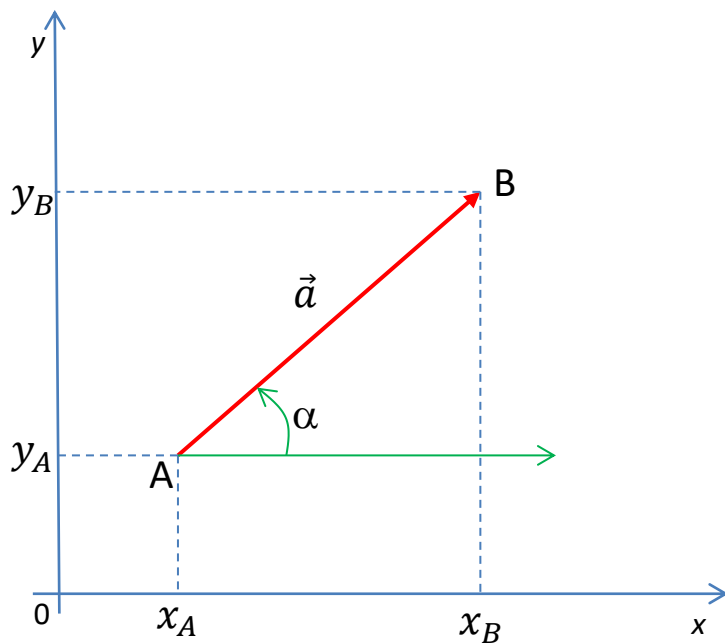


Уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

x_0, y_0 – координаты центра окружности,
 x, y – координаты произвольной точки окружности,
 R – радиус окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА



Вектор – направленный отрезок (A – начало вектора, B – конец).

Координаты вектора (проекции вектора на координатные оси):

$$a_x = x_B - x_A = a \cos \alpha;$$

$$a_y = y_B - y_A = a \sin \alpha.$$

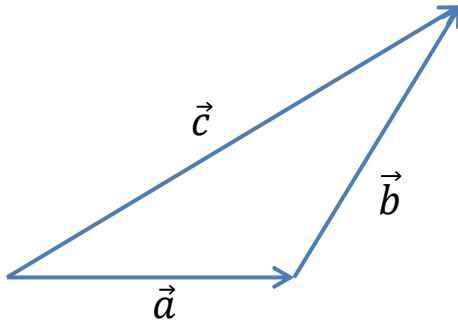
Модуль вектора – длина его отрезка:

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}| = a = AB = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Угол α отсчитывается от положительного направления оси x и имеет положительное значение, если поворот против часовой стрелки, и отрицательное, если против.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

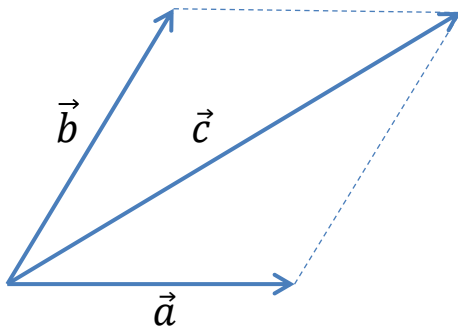
Правило треугольника



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{c} - \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

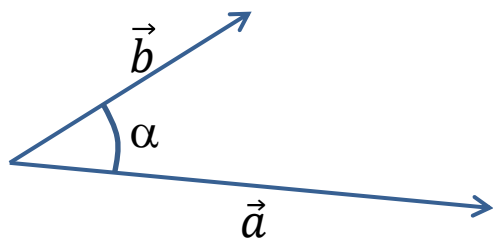
$$\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$$

Правило параллелограмма



- Чтобы найти разность векторов $\vec{c} - \vec{a}$, можно нарисовать их исходящими из одной точки, и соединить конец вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{c}$. Получится вектор $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.
- Проверить разность сложением!

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

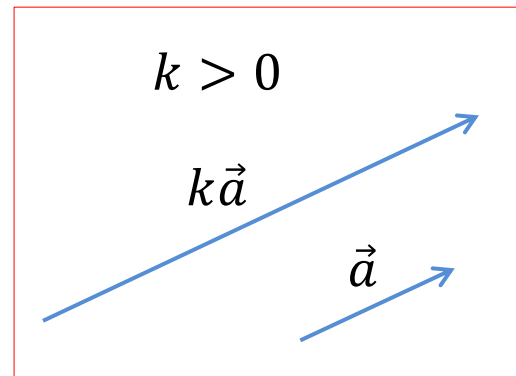
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a \cdot b}$$

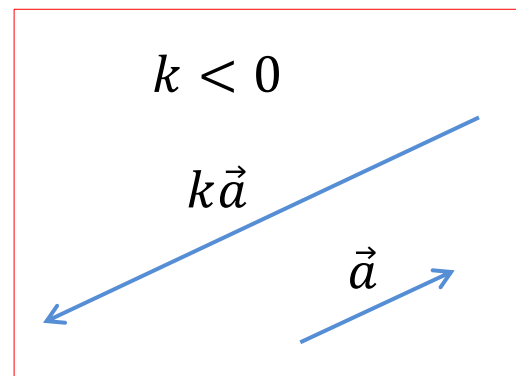
Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю ($\cos 90^\circ = 0$).

УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

При умножении вектора $\vec{a}$ на число $k > 0$ получается сонаправленный вектор $k\vec{a}$, модуль которого в k раз больше: $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$



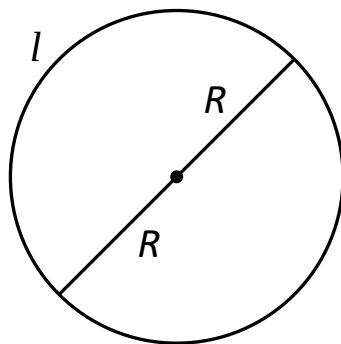
При умножении вектора $\vec{a}$ на число $k < 0$ получается противоположно направленный вектор $k\vec{a}$, модуль которого в $|k|$ раз больше: $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$



$$\vec{a} = \{a_x; a_y\} \Rightarrow k\vec{a} = \{ka_x; ka_y\}$$

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

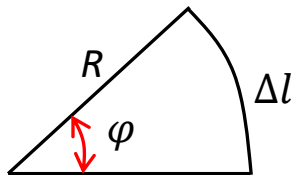
Число π – отношение длины окружности к ее диаметру



$$D = 2R$$

$$\pi = \frac{l}{D} \Leftrightarrow l = 2\pi R = \pi D$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

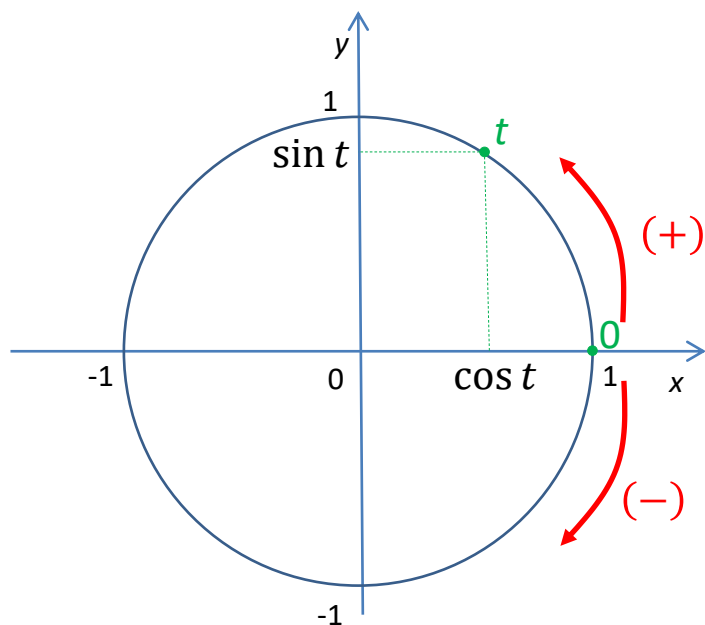


$$\varphi = \frac{\Delta l}{R}$$

$$\Delta S = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi R^2$$



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ



- Число π – отношение длины окружности к ее диаметру.
- Числовая (тригонометрическая) окружность – окружность радиуса 1 с центром в начале координат.
- Косинус числа t – абсцисса точки t числовой окружности.
- Синус числа t – ордината точки t числовой окружности.

$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} \varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin x = a, \quad -1 \leq a \leq 1$$

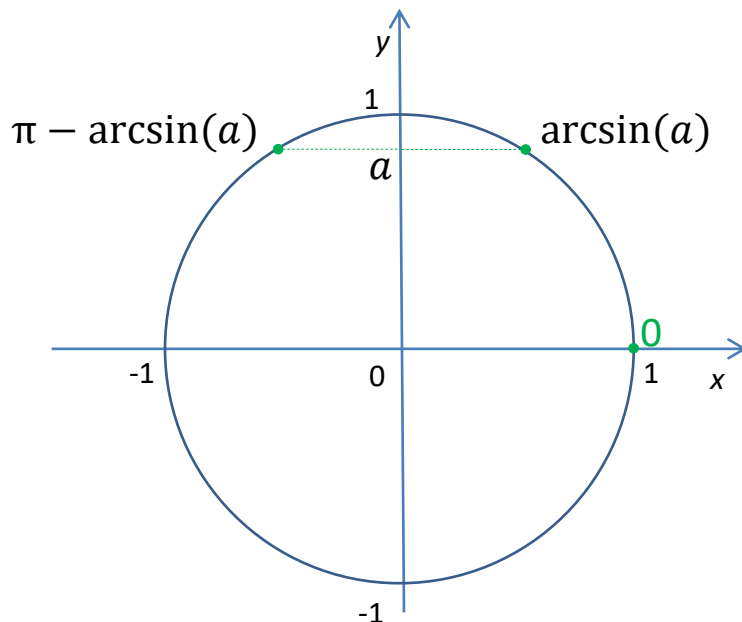
Частные случаи:

- $a = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $a = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $a = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \arcsin(a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin(a) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ИЛИ

$$x = (-1)^n \arcsin(a) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

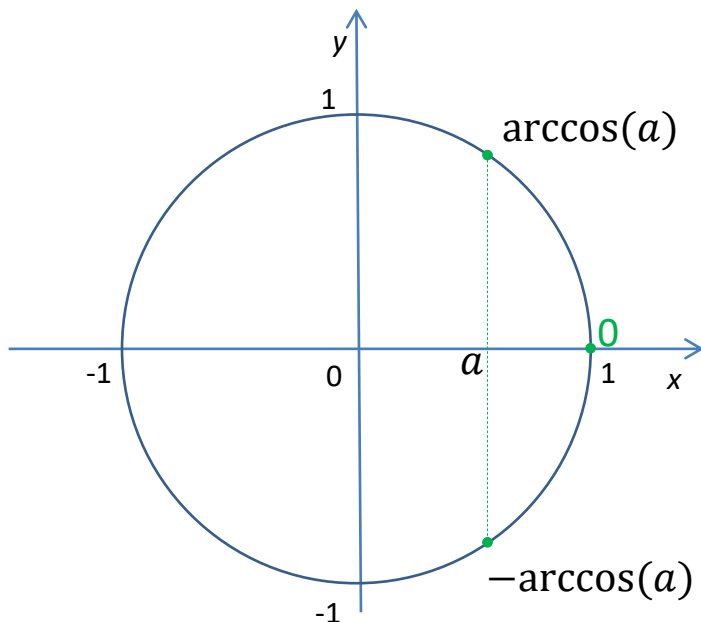


$$D(\arcsin(x)) = [-1; 1] \quad E(\arcsin(x)) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(\arcsin(a)) = a$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin(a) \quad \arcsin(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$\cos x = a, \quad -1 \leq a \leq 1$$



Частные случаи:

- $a = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $a = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $a = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

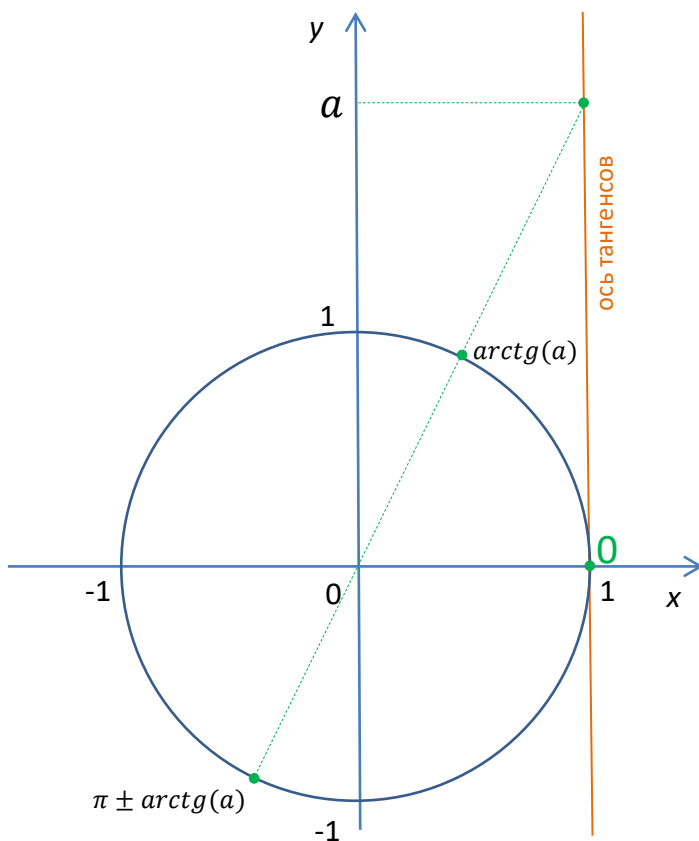
$$x = \pm \arccos(a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$D(\arccos(x)) = [-1; 1] \quad E(\arccos(x)) = [0; \pi] \quad \cos(\arccos(a)) = a$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos(a) \quad \arcsin(a) + \arccos(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\operatorname{tg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$$



$$x = \operatorname{arctg}(a) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$D(\operatorname{arctg}(x)) = \mathbb{R}$$

$$E(\operatorname{arctg}(x)) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

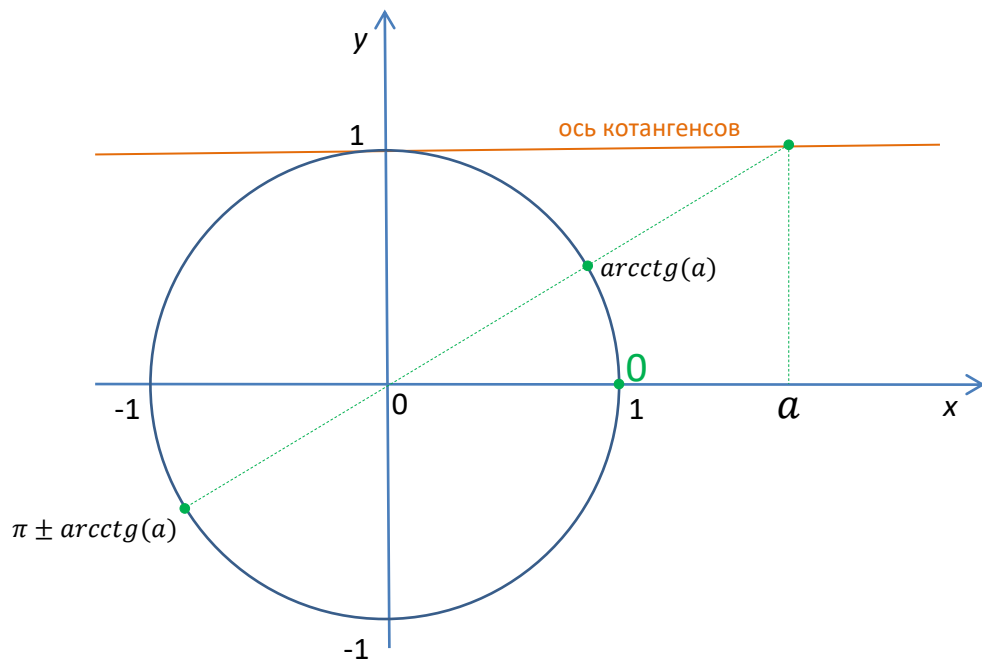
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(a)) = a$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg}(a)$$

$$\operatorname{arctg}(a) + \operatorname{arcctg}(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad a \in \mathbb{R}$$



$$x = \operatorname{arcctg}(a) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$D(\operatorname{arcctg}(x)) = \mathbb{R}$$

$$E(\operatorname{arcctg}(x)) = (0; \pi)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(a)) = a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg}(a)$$

$$\operatorname{arctg}(a) + \operatorname{arcctg}(a) = \frac{\pi}{2}$$

φ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{ctg} \varphi$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}n + t\right) = \psi(t)$$

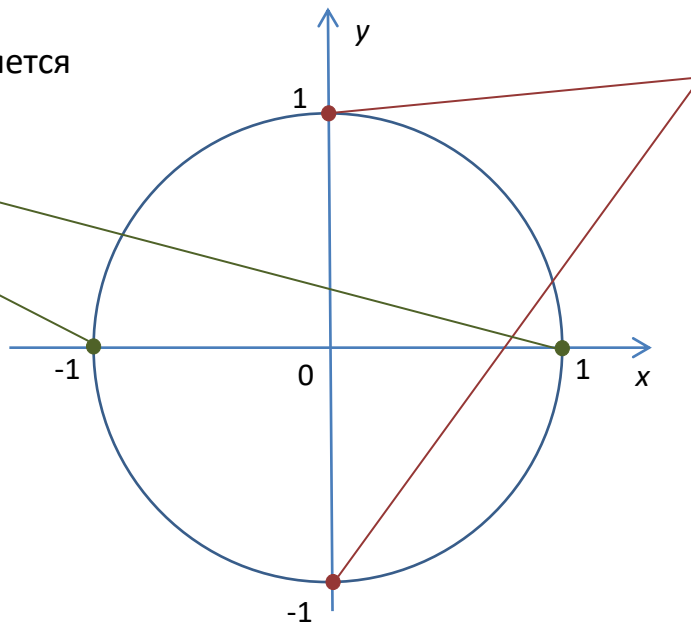
$$n = 2k$$

$\frac{\pi}{2} \cdot 2k$ – функция сохраняется

Примеры:

$$\begin{aligned}\cos(\pi + t) &= -\cos t \\ \sin(\pi + t) &= -\sin t \\ \operatorname{tg}(\pi + t) &= \operatorname{tg} t \\ \operatorname{ctg}(\pi + t) &= \operatorname{ctg} t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\pi + t) &= \cos t \\ \sin(2\pi + t) &= \sin t \\ \operatorname{tg}(2\pi + t) &= \operatorname{tg} t \\ \operatorname{ctg}(2\pi + t) &= \operatorname{ctg} t\end{aligned}$$



$$n = 2k + 1$$

$\frac{\pi}{2}(2k + 1)$ – функция меняется на кофункцию: косинус на синус, синус на косинус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс.

Примеры:

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 + t) &= -\sin t \\ \sin(\pi/2 + t) &= \cos t \\ \operatorname{tg}(\pi/2 + t) &= -\operatorname{ctg} t \\ \operatorname{ctg}(\pi/2 + t) &= -\operatorname{tg} t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi/2 - t) &= \sin t \\ \sin(\pi/2 - t) &= \cos t \\ \operatorname{tg}(\pi/2 - t) &= \operatorname{ctg} t \\ \operatorname{ctg}(\pi/2 - t) &= \operatorname{tg} t\end{aligned}$$

Перед приведенной функцией $\psi(t)$ ставится знак приводимой $\varphi\left(\frac{\pi}{2}n + t\right)$,
при условии $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

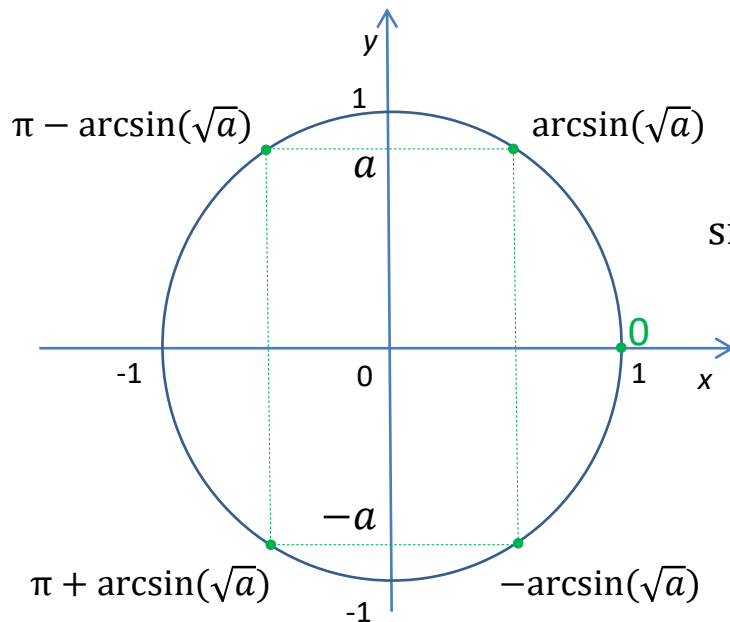
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

КВАДРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ



$$\sin^2 x = a, 0 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

АНАЛОГИЧНО:

$$\cos^2 x = a, 0 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = a, 0 \leq a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = a, 0 \leq a \Leftrightarrow x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$4) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$5) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$6) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$7) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Особые случаи:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(-b + a)^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ПРАВИЛА АРИФМЕТИКИ

$$8) -a + b = b - a$$

$$9) a - b = -(b - a)$$

$$10) -a - b = -(a + b)$$

$$11) a + (-b) = a - b$$

$$12) -a + (-b) = -a - b$$

$$13) k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Умножение на $10^{\pm n}$:

$X \cdot 10^n$ – переносим запятую у числа X на n знаков вправо

$X \cdot 10^{-n}$ – переносим запятую у числа X на n знаков влево

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ И КОРНЯ

Арифметический корень

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$a > 0, b > 0$$

$$1) a^0 = 1$$

$$2) a^1 = a$$

$$3) a^m a^n = a^{m+n}$$

$$4) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$5) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$6) (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$7) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$8) (ab)^n = a^n b^n$$

$$9) \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$10) \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$11) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

$$12) \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$13) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$14) \sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m$$

$$15) \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$16) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$17) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$18) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

 $\forall a$

$$19) \sqrt{a^{2n}} = |a^n|$$

$$20) \sqrt{a^2} = |a|$$

 $ab > 0$

$$21) \sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$$

$$22) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

 $a \geq 0$

$$23) \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$24) \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$25) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$26) (\sqrt{a})^2 = a$$

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то два решения $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

если $D = 0$, то одно решение $x_1 = -\frac{b}{2a}$,

если $D < 0$, решений нет.

Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Разложение на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Выделение полного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО

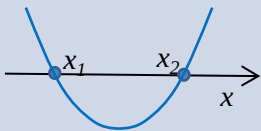
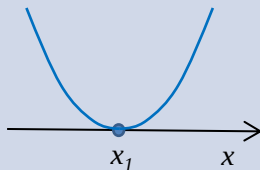
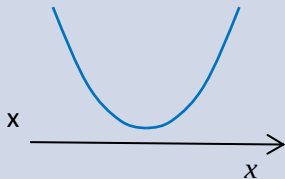
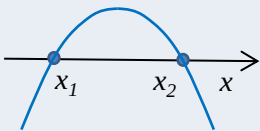
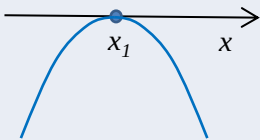
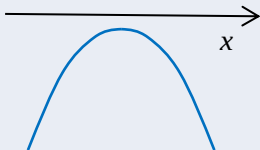
$ax^2 + bx + c \geq 0$ – часть графика над осью X , включая нули;

$ax^2 + bx + c > 0$ – часть графика над осью X , не включая нули;

$ax^2 + bx + c \leq 0$ – часть графика под осью X , включая нули;

$ax^2 + bx + c < 0$ – часть графика под осью X , не включая нули.

$$D = b^2 - 4ac$$

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Координата x вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0}$$

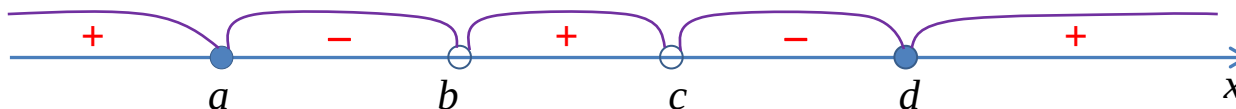
Точки разрыва – значения x , при которых знаменатель равен нулю:

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 = 0$$

Нули – значения x , при которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\begin{cases} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \\ b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 \neq 0 \end{cases}$$

Участки числовой прямой между нулями и точками разрыва – интервалы знакопостоянства функции $f(x)$:



Нули входят в решение нестрогих неравенств ($\geq$ или $\leq$).

Точки разрыва в решение никогда не входят!!!

УРАВНЕНИЯ

$$\psi(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$1) \psi(x) + a = \varphi(x) + a; a \in R$$

$$2) \psi(x) - b = \varphi(x) - b; b \in R$$

$$3) k \cdot \psi(x) = k \cdot \varphi(x); k \neq 0$$

$$4) \frac{\psi(x)}{d} = \frac{\varphi(x)}{d}; d \neq 0$$

$$5) [\psi(x)]^{2n+1} = [\varphi(x)]^{2n+1}; n \in Z$$

$$6) \sqrt[2n+1]{\psi(x)} = \sqrt[2n+1]{\varphi(x)}; n \in N$$

$$\psi(x) = \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$7) [\psi(x)]^n = [\varphi(x)]^n; n \neq 0, n \in Z$$

$$8) \sqrt[n]{\psi(x)} = \sqrt[n]{\varphi(x)}; n \in N$$

$$\psi(x) = \varphi(x) \Rightarrow$$

$$9) [\psi(x)]^{2n} = [\varphi(x)]^{2n}; n \in N$$

$$\begin{cases} \psi(x) = \varphi(x) \\ \alpha(x) = \beta(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$10) \psi(x) + \alpha(x) = \varphi(x) + \beta(x)$$

$$11) \psi(x) - \alpha(x) = \varphi(x) - \beta(x)$$

$$12) \psi(x) \cdot \alpha(x) = \varphi(x) \cdot \beta(x)$$

$$13) \frac{\psi(x)}{\alpha(x)} = \frac{\varphi(x)}{\beta(x)}, \text{ если } \alpha(x) = \beta(x) \neq 0$$

Решение пропорции

$$a = \frac{b \cdot c}{d} \quad c = \frac{a \cdot d}{b}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \cdot d = c \cdot b$$

$$b = \frac{a \cdot d}{c} \quad d = \frac{b \cdot c}{a}$$

«левое множим на
правое, делим на
противоположное»

НЕРАВЕНСТВА

$$\psi(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$1) \psi(x) + a > \varphi(x) + a; a \in R$$

$$2) \psi(x) - b > \varphi(x) - b; b \in R$$

$$3) k \cdot \psi(x) > k \cdot \varphi(x); k > 0$$

$$4) h \cdot \psi(x) < h \cdot \varphi(x); h < 0$$

$$5) \frac{\psi(x)}{d} > \frac{\varphi(x)}{d}; d > 0$$

$$6) \frac{\psi(x)}{q} < \frac{\varphi(x)}{q}; q < 0$$

$$7) [\psi(x)]^{2n+1} > [\varphi(x)]^{2n+1}; n \in N$$

$$8) \sqrt[2n+1]{\psi(x)} > \sqrt[2n+1]{\varphi(x)}; n \in N$$

$$\psi(x) > \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$9) \frac{1}{\psi(x)} < \frac{1}{\varphi(x)}$$

Сравнение

положительных дробей

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$$

$$\psi(x) > \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$10) [\psi(x)]^{2n} > [\varphi(x)]^{2n}; n \in N$$

$$11) \sqrt[2n]{\psi(x)} > \sqrt[2n]{\varphi(x)}; n \in N$$

$$\begin{cases} \psi(x) > \varphi(x) \\ \alpha(x) > \beta(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$12) \psi(x) + \alpha(x) > \varphi(x) + \beta(x)$$

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Определение модуля

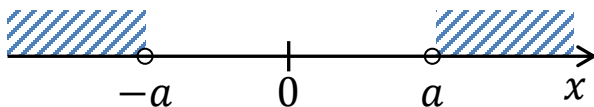
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Уравнение

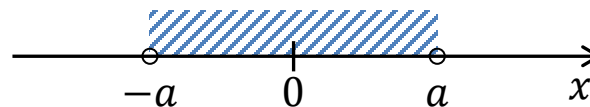
$$|x| = a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases}$$

Неравенства с модулем

$$|x| > a \Leftrightarrow \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases}$$



$$|x| < a \Leftrightarrow \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases}$$



ПРОЦЕНТЫ

1 % – это одна сотая часть целого

Увеличить число X на $n\%$ **РАВНОСИЛЬНО** умножить число X на $k = \left(1 + \frac{n}{100}\right)$

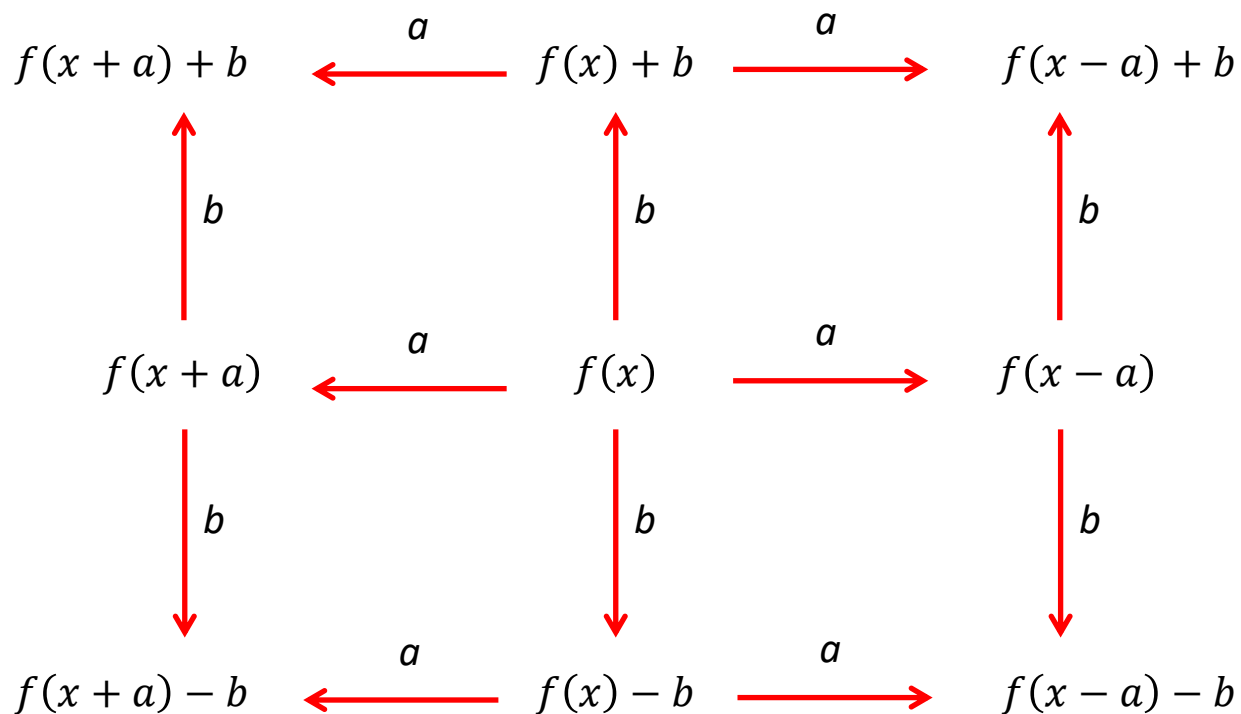
Уменьшить число X на $n\%$ **РАВНОСИЛЬНО** умножить число X на $k = \left(1 - \frac{n}{100}\right)$

Правило пропорции

$$\begin{array}{lcl} M & \rightarrow & 100\% \\ m & \rightarrow & x\% \end{array} \Rightarrow M \cdot x = m \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot m}{M}$$



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС



Четность и нечетность функций

Четная

$$F(-x) = F(x)$$

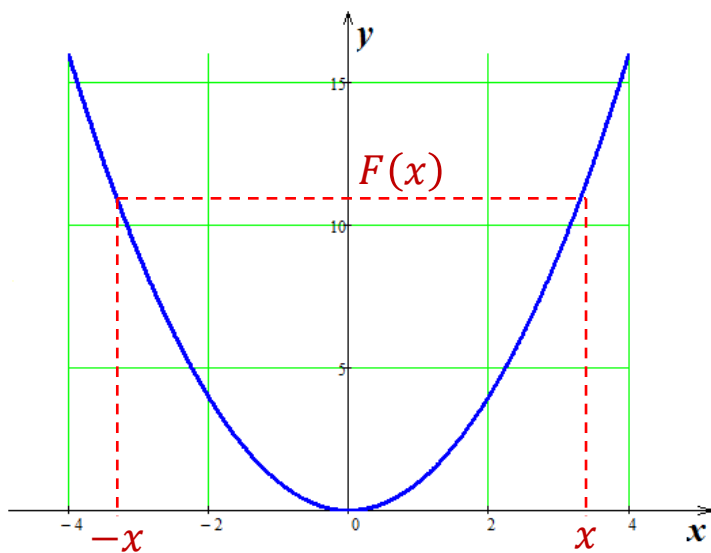
Пример: $F(x) = x^2$ 

График симметричен
относительно оси Y

Нечетная

$$F(-x) = -F(x)$$

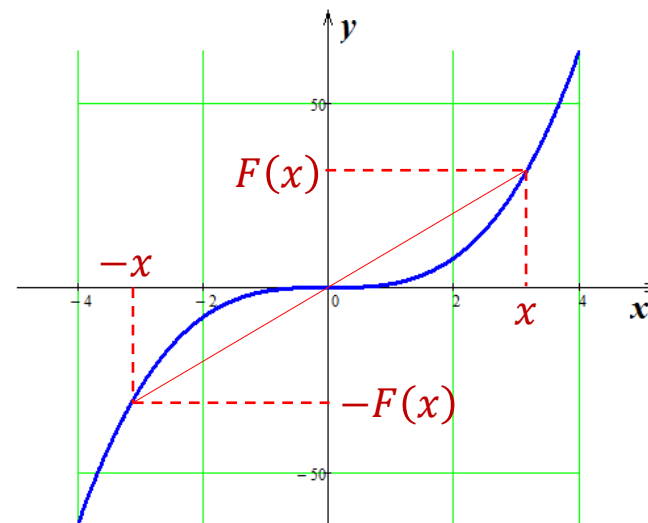
Пример: $F(x) = x^3$ 

График симметричен
относительно начала координат

ПРОИЗВОДНАЯ

Производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

2

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C} u' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$C' = 0$$

3

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \text{в частности} \quad (x)' = 1, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad \text{в частности} \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \text{в частности} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

4

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \quad \text{в частности} \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

5

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad \text{в частности} \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u' \quad \text{в частности} \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

6

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

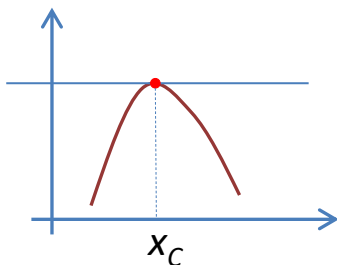
$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

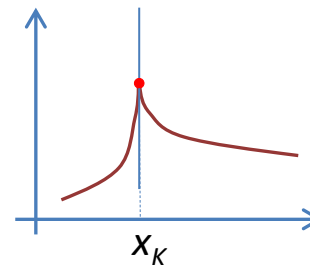
Если производная положительна, то функция возрастает: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$.

Если производная отрицательна, то функция убывает: $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow$.

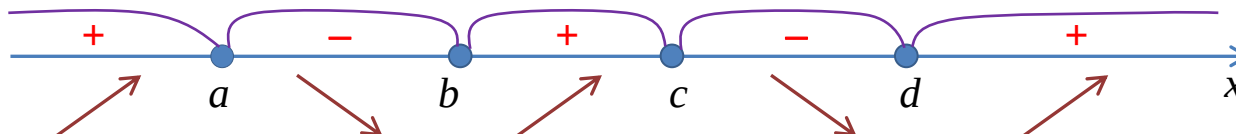
Стационарные точки - точки, в которых производная функции равна нулю:



Критические точки - точки, в которых функция определена и непрерывна, но производная не существует:

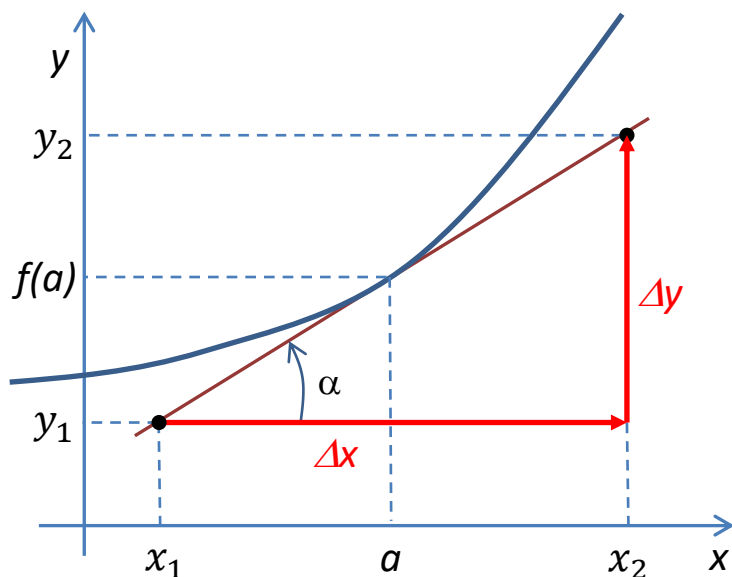


Точки экстремума - обобщенный термин для точек минимума и максимума.



a и c – точки максимума, b и d – точки минимума

КАСАТЕЛЬНАЯ



Уравнение касательной:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

α – угол наклона касательной к оси X

$$f'(a) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

$y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$, если $\begin{cases} f'(a) = k \\ f(a) = ka + b \end{cases}$

$y = kx + b$ параллельна касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x = a$, если $f'(a) = k$

ПЕРВООБРАЗНАЯ

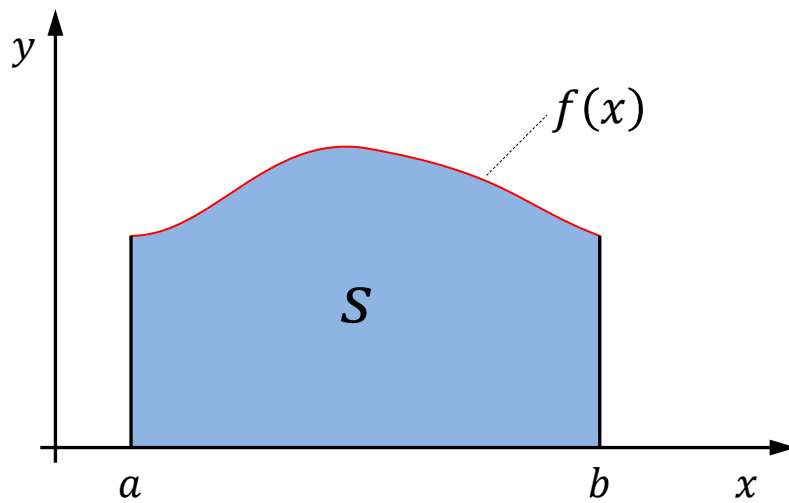
Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

- Если $y = F(x)$ – первообразная для функции $y = f(x)$, то у функции $y = f(x)$ бесконечно много первообразных, и все они имеют вид $y = F(x) + C$.
- Если F есть первообразная для f , а G – первообразная для g , то $F + G$ есть первообразная для $f + g$.
- Если F есть первообразная для f , а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf .
- Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, a и k – постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + a)$ есть первообразная для $f(kx + a)$.

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	x
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\sin x$	$-\cos x$

$f(x)$	$F(x)$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

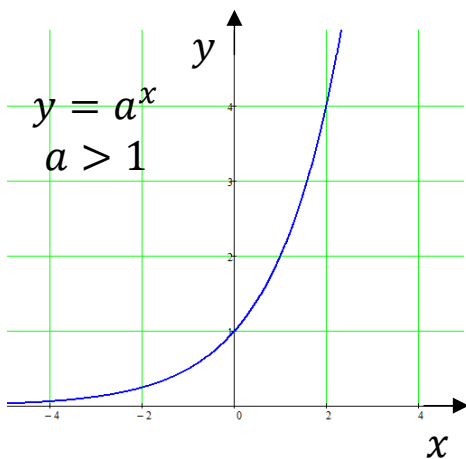


$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.



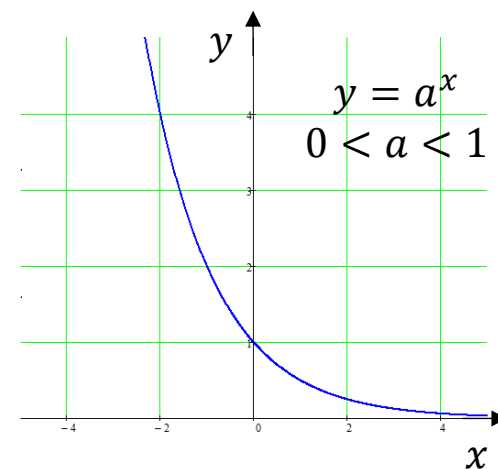
ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА



$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$$

$$a > 1$$

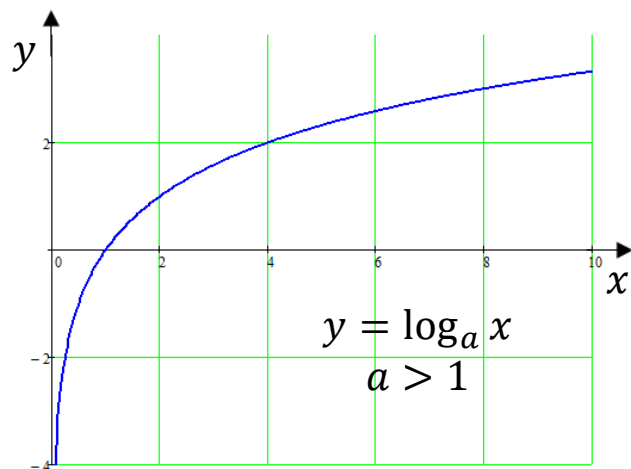
$$f(x) > \varphi(x)$$



$$0 < a < 1$$

$$f(x) < \varphi(x)$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА



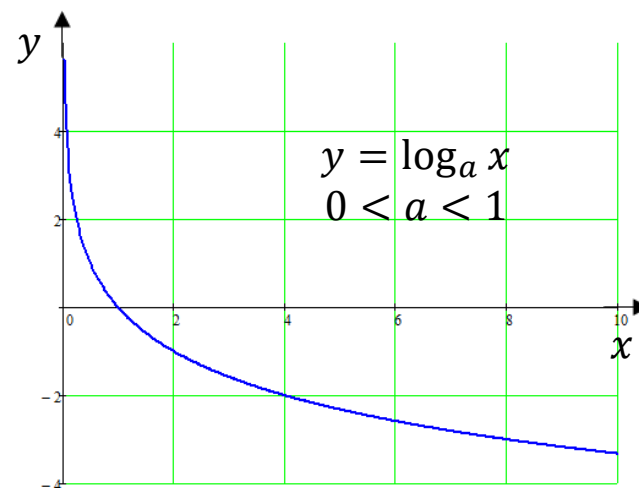
$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$$

$$a > 1$$

логарифм убираем – знак
неравенства оставляем

$$\begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

меньшее из двух
больше нуля



$$0 < a < 1$$

логарифм убираем – знак неравенства
меняем на противоположный

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ

№	Исходное выражение	Выражение после замены
1	$\log_a B - \log_a C$	$\frac{B - C}{a - 1}$
2	$\log_a B - 1$	$\frac{B - a}{a - 1}$
3	$\log_a B$	$\frac{B - 1}{a - 1}$
4	$\log_a C - \log_b C$	$\frac{(b - a)(C - 1)}{(a - 1)(b - 1)}$
5	$C^a - C^b$	$(C - 1)(a - b)$
6	$C^a - 1$	$(C - 1) \cdot a$
7	$B^a - C^a$	$(B - C) \cdot a$
8	$ A - B $	$(A - B)(A + B)$
9	$\sqrt{A} - \sqrt{B}$	$A - B$
10	$ A - \sqrt{B}$	$A^2 - B$

Иррациональное выражение можно рационализировать, когда только его знак имеет значение. То есть, когда справа ноль, а слева рационализируемое выражение (логарифм, модуль, степень...) является общим множителем или делителем.

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \\ a > 0, a \neq 1, b > 0$$

$$1) b^{\log_b a} = a$$

$$2) \log_a a = 1$$

$$3) \log_a 1 = 0$$

$$4) \log_a a^m = m$$

$$5) \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$6) \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$7) \log_c a^k = k \cdot \log_c a$$

$$8) \log_{c^n} a = \frac{1}{n} \log_c a$$

$$9) \log_{c^n} a^k = \frac{k}{n} \log_c a$$

$$10) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$11) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

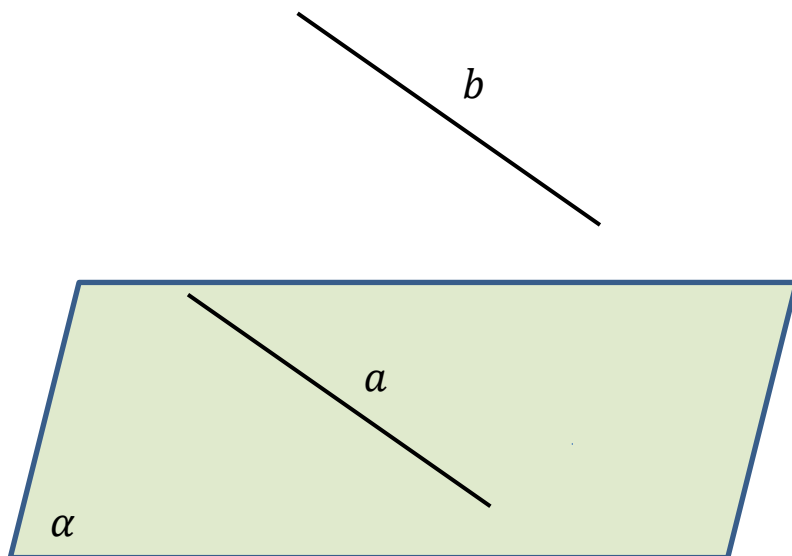
$$\log_a b = \frac{\log_n b}{\log_n a} = \frac{\log_m b}{\log_m a} \Rightarrow \log_n b \cdot \log_m a = \log_m b \cdot \log_n a \Rightarrow$$

$$n^{\log_n b \cdot \log_m a} = n^{\log_m b \cdot \log_n a} \Rightarrow b^{\log_m a} = a^{\log_m b}$$





ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



$$b \parallel a \Rightarrow b \parallel \alpha$$

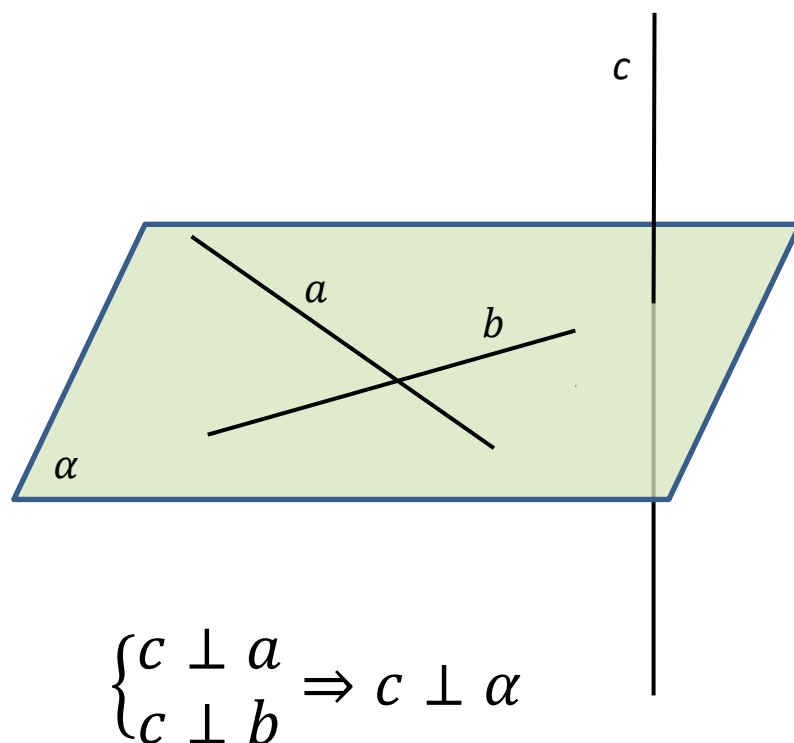
➤ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Прямая параллельна плоскости, если не имеет с ней общих точек.

➤ ТЕОРЕМА

Прямая параллельна плоскости, если параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



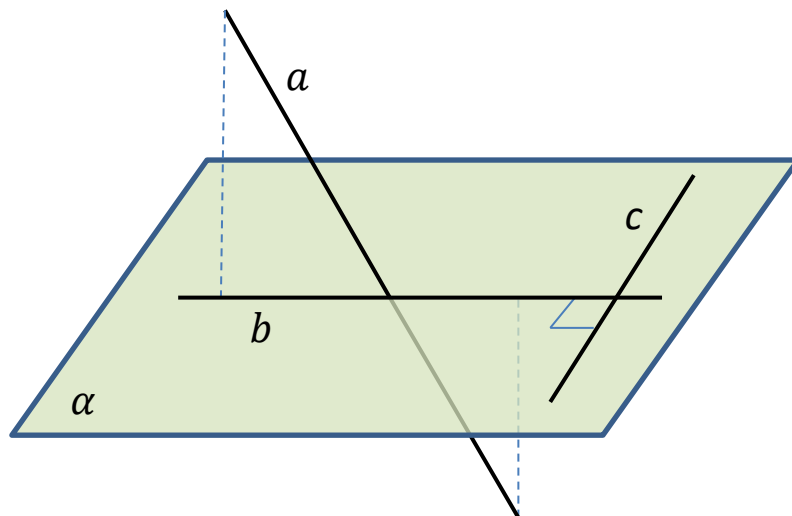
➤ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

➤ ТЕОРЕМА

Если прямая перпендикулярна любым двум пересекающимися прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



$$c \perp a \Leftrightarrow c \perp b$$

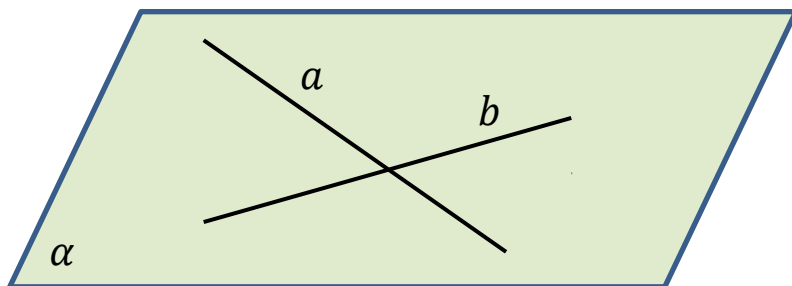
- Если прямая c , лежащая в плоскости α , перпендикулярна проекции b наклонной a на плоскость α , то она перпендикулярна и самой наклонной:

$$c \perp b \Rightarrow c \perp a$$

- Если прямая c , лежащая в плоскости α , перпендикулярна наклонной a к плоскости α , то она перпендикулярна и ее проекции b на плоскость α :

$$c \perp a \Rightarrow c \perp b$$

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

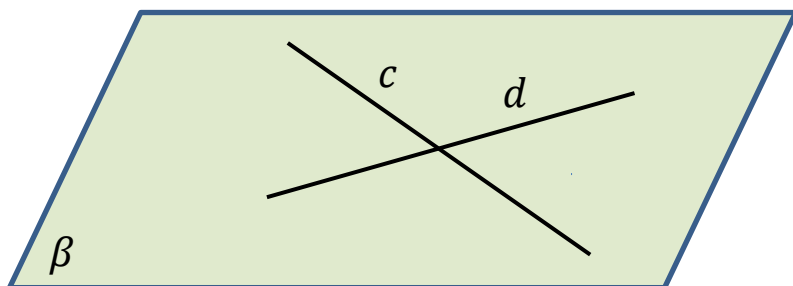


➤ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

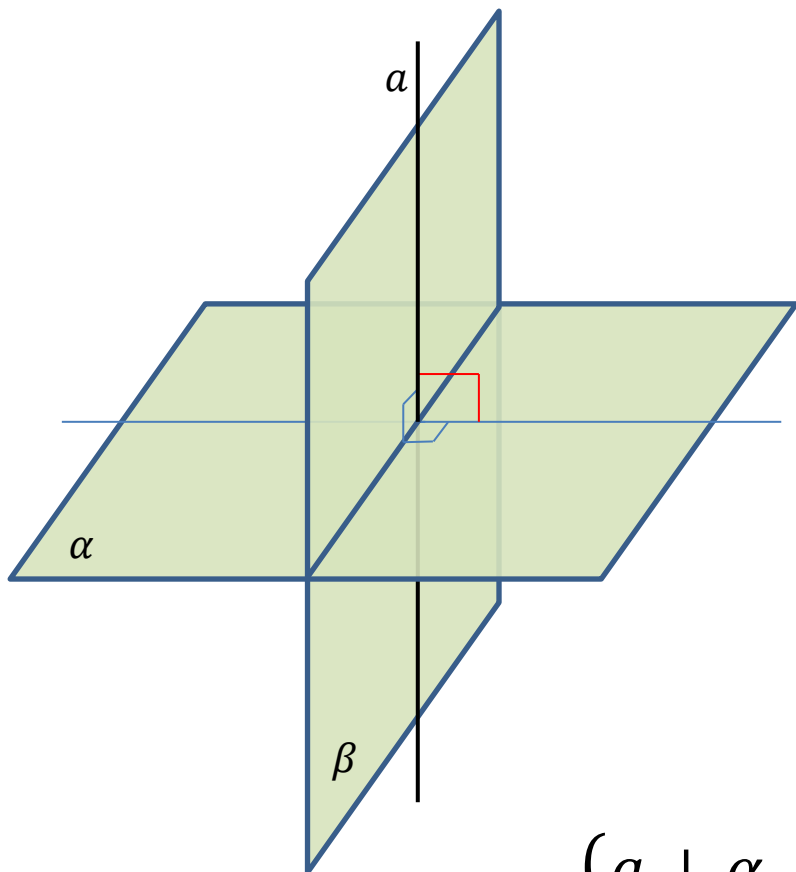
➤ ТЕОРЕМА

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel d \end{cases} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



➤ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90° .

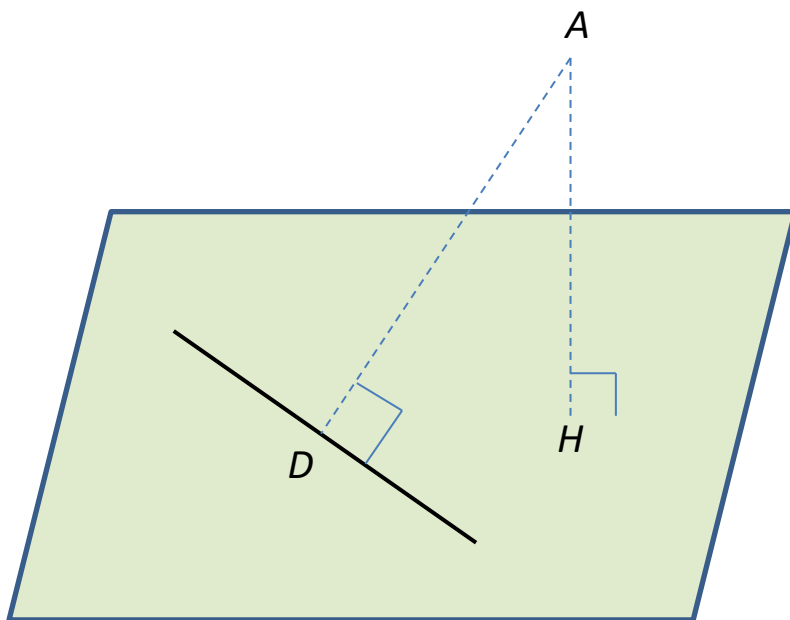
➤ ТЕОРЕМА

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

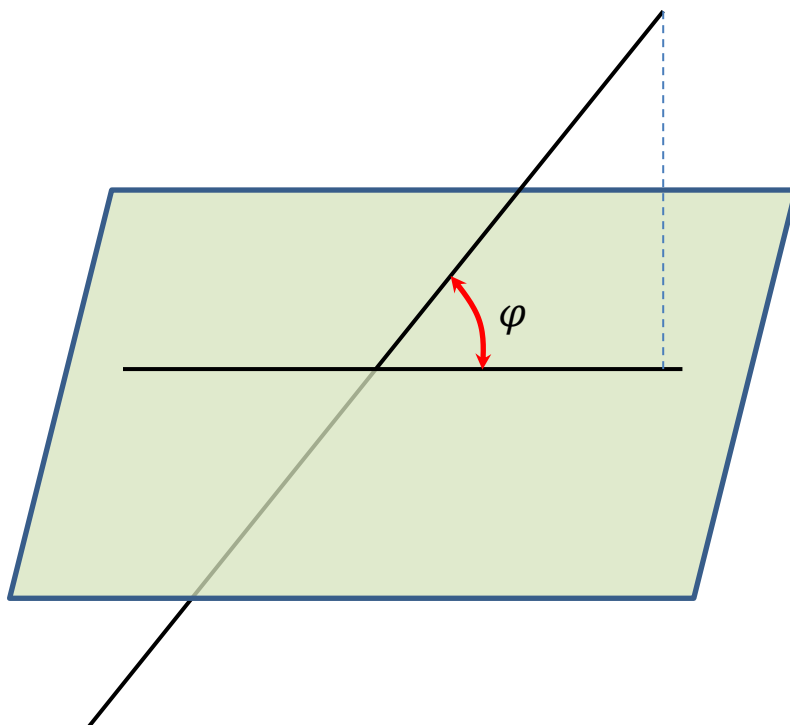


РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



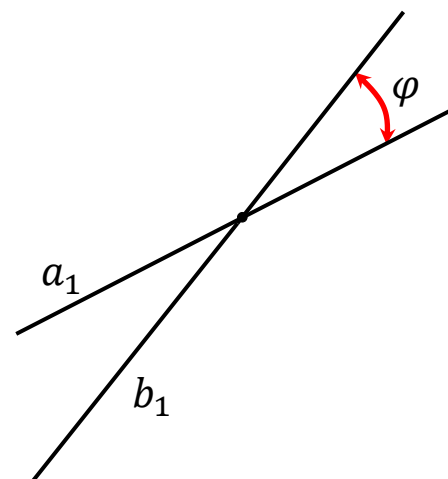
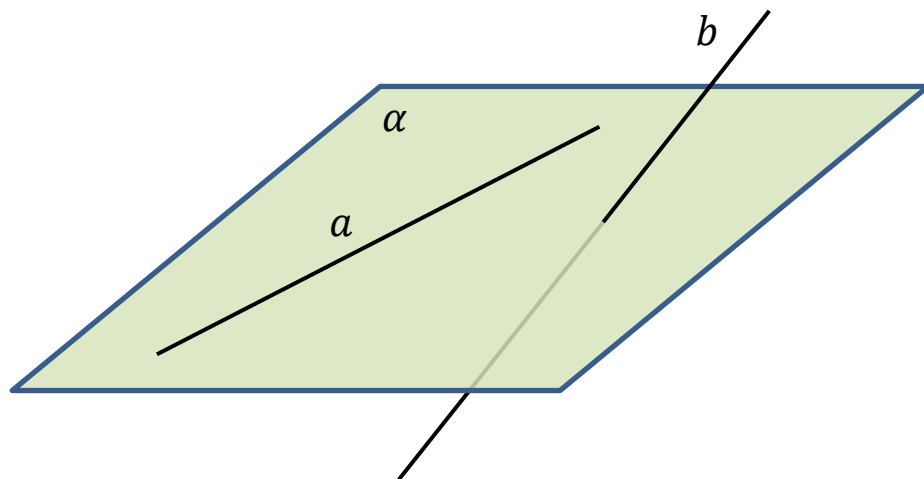
- Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (AD).
- Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (AH).

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ



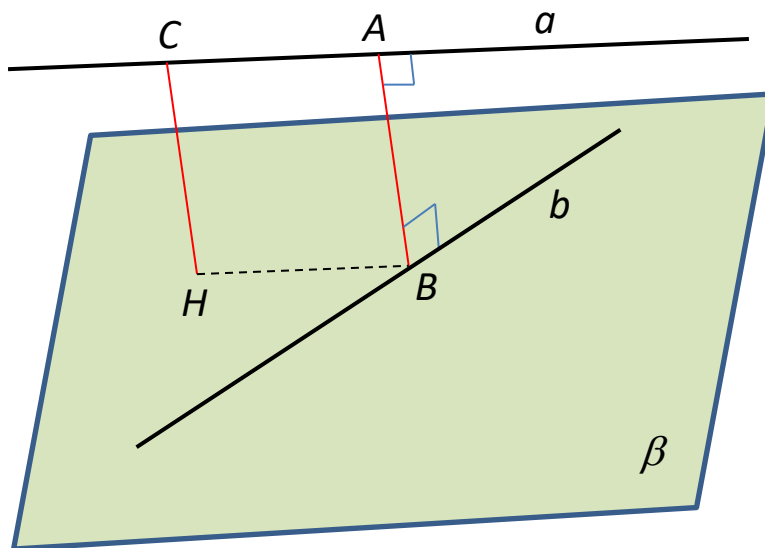
Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

УГОЛ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ



Угол между скрещивающимися прямыми a и b – это угол между параллельными им пересекающимися прямыми: $\widehat{a, b} = \widehat{a_1, b_1}$, где $a_1 \parallel a, b_1 \parallel b$.

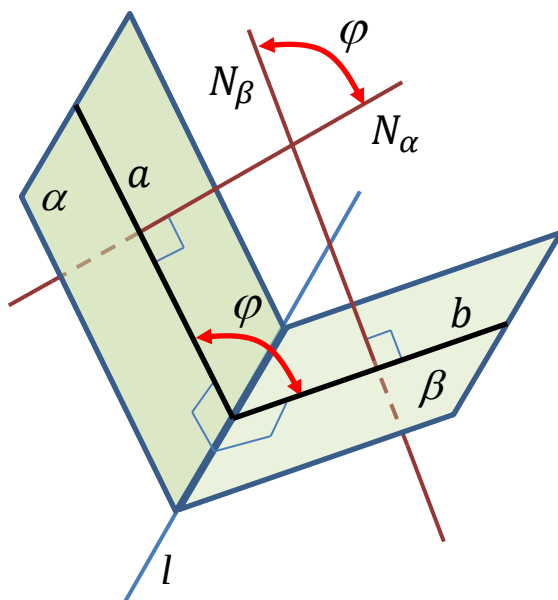
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ



Расстояние между скрещивающимися прямыми a и b – длина отрезка AB , перпендикулярного как прямой a , так и прямой b .

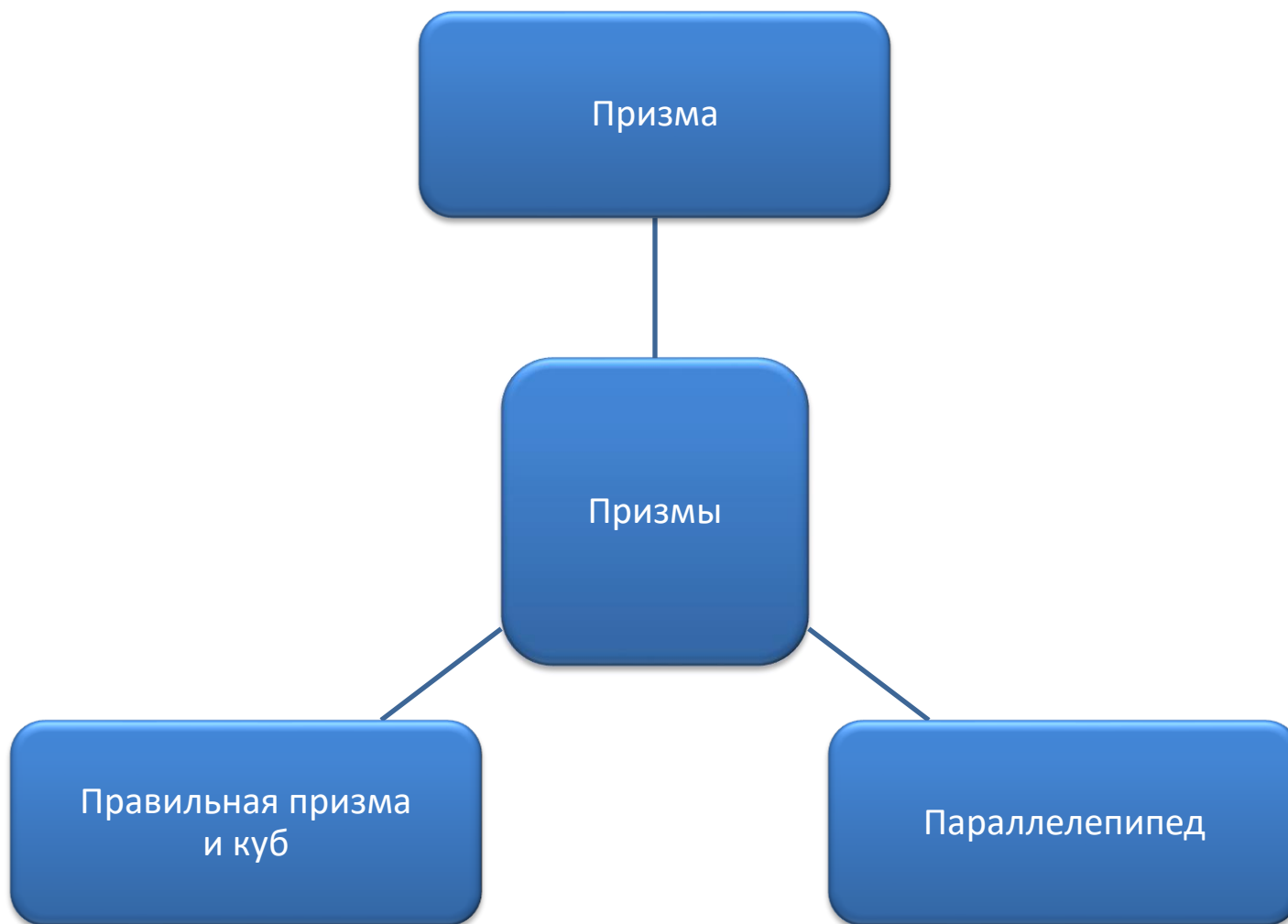
Это расстояние равно расстоянию CH от любой точки C прямой a до плоскости β ($a \parallel \beta$), в которой лежит прямая b ($b \in \beta$).

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ



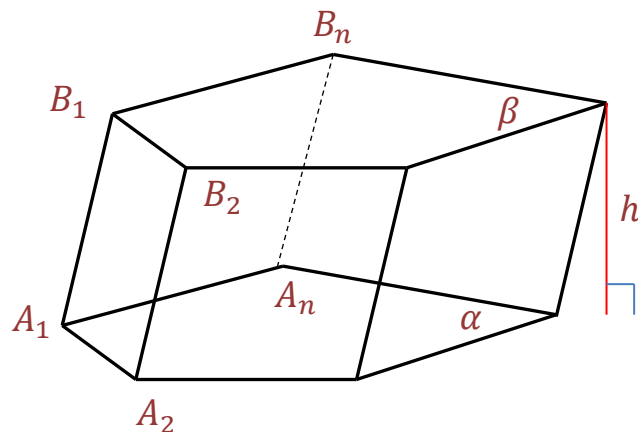
Угол между плоскостями α и β – это угол φ между лучами a и b , лежащими в плоскостях α и β и перпендикулярными прямой пересечения плоскостей l : $a \perp l, b \perp l$.

Этот угол равен углу между нормальными (перпендикулярами) к плоскостям α и β :
 $\varphi = \widehat{N_\alpha N_\beta}$



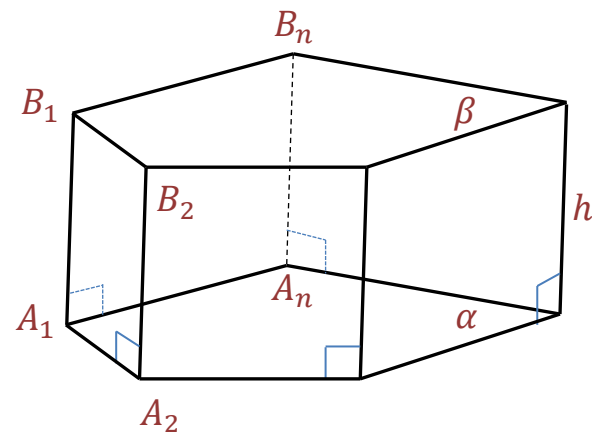
ПРИЗМА

Наклонная призма



Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ (оснований), расположенных в параллельных плоскостях ($\alpha \parallel \beta$), и n параллелограммов (боковых граней), называется призмой.

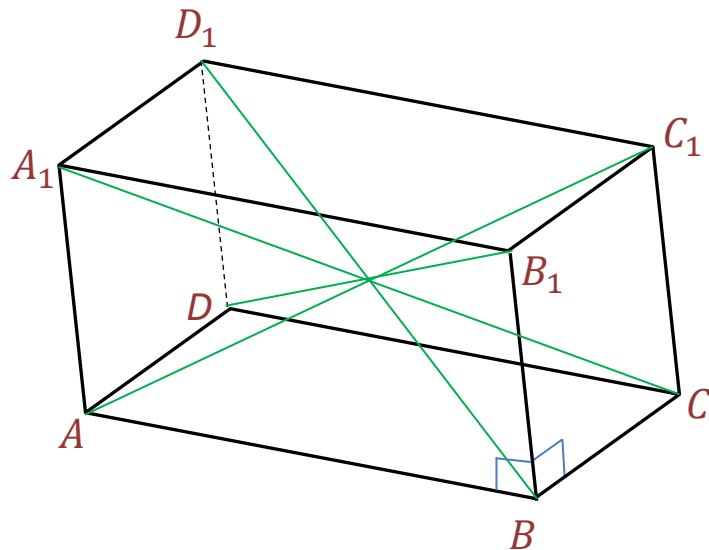
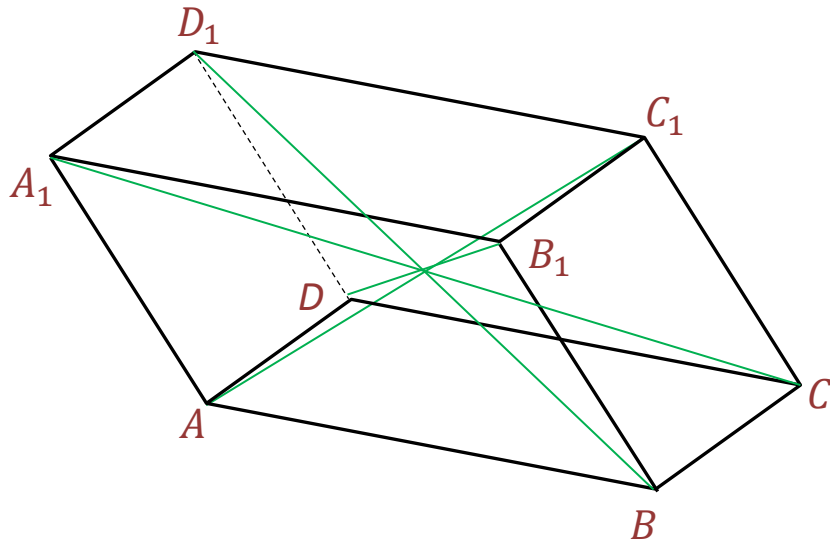
Прямая призма



У прямой призмы боковые ребра перпендикулярны основаниям, а высота равна боковому ребру.

Объем призмы:
$$V = Sh$$

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



Параллелепипед – призма, основание которой параллелограмм.

- Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
- Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.

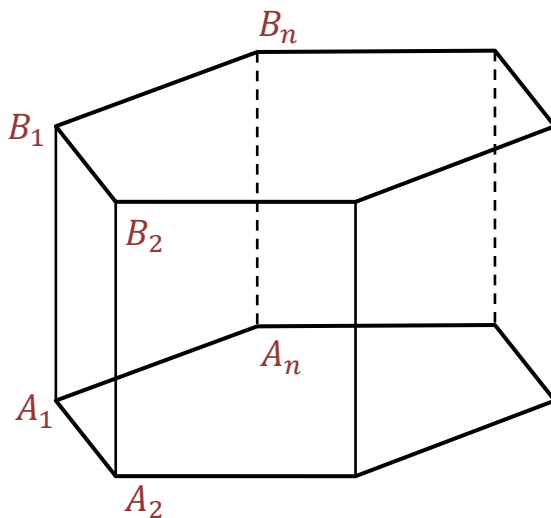
- Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$AC_1^2 = AB^2 + BB_1^2 + B_1C_1^2$$

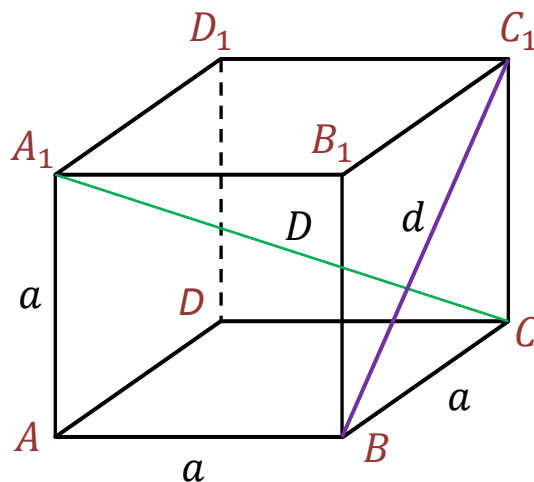
- Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = AB \cdot BB_1 \cdot B_1C_1$$

ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА И КУБ



Правильная призма – прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.



Куб – прямоугольный параллелепипед, все грани которого равные квадраты.

$$d = a\sqrt{2}$$

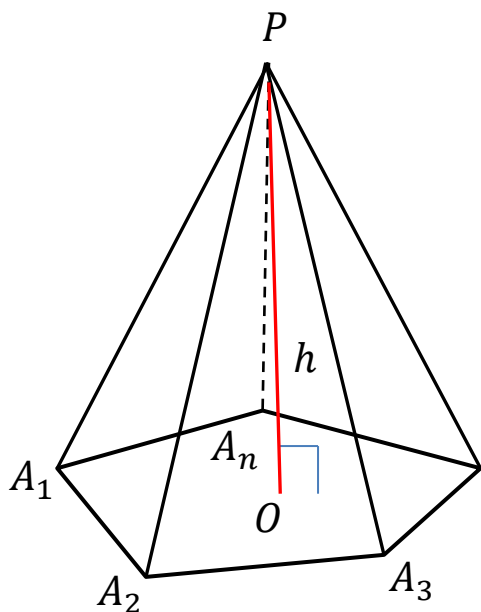
$$D = a\sqrt{3}$$

$$S = 6a^2 = 2d^2$$

$$V = a^3$$



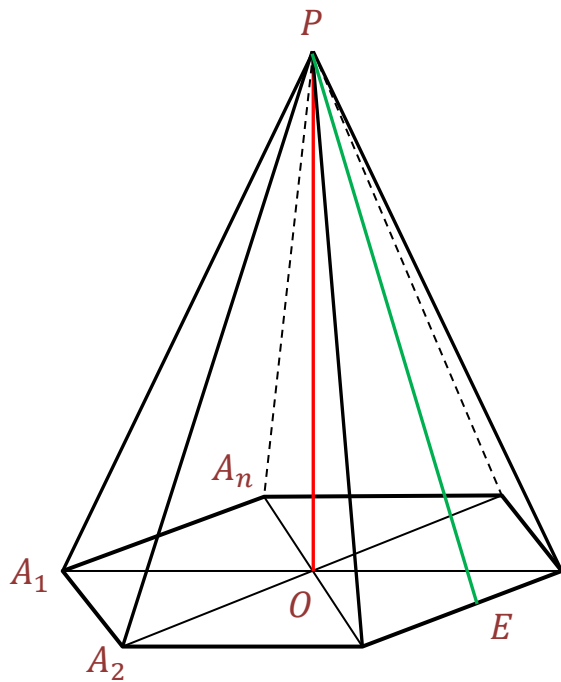
ПИРАМИДА



Многоугольник $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – основание пирамиды.
Треугольники $A_1PA_2, A_1PA_2, \dots, A_nPA_1$ – боковые грани.
 P – вершина пирамиды.
 PO – высота пирамиды.

Объем пирамиды:
$$V = \frac{1}{3}hS$$

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА



Пирамида называется правильной, если ее основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой (PO).

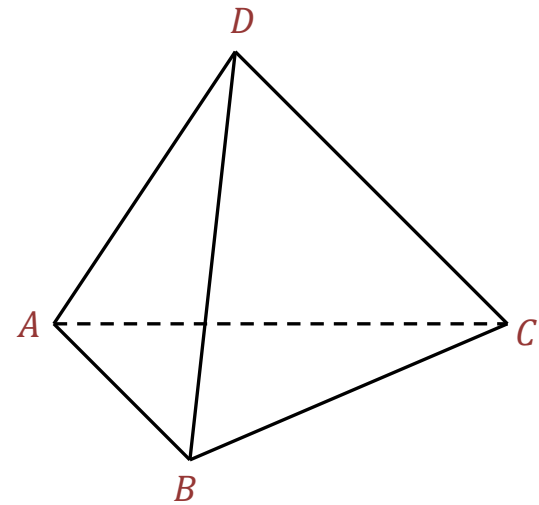
Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

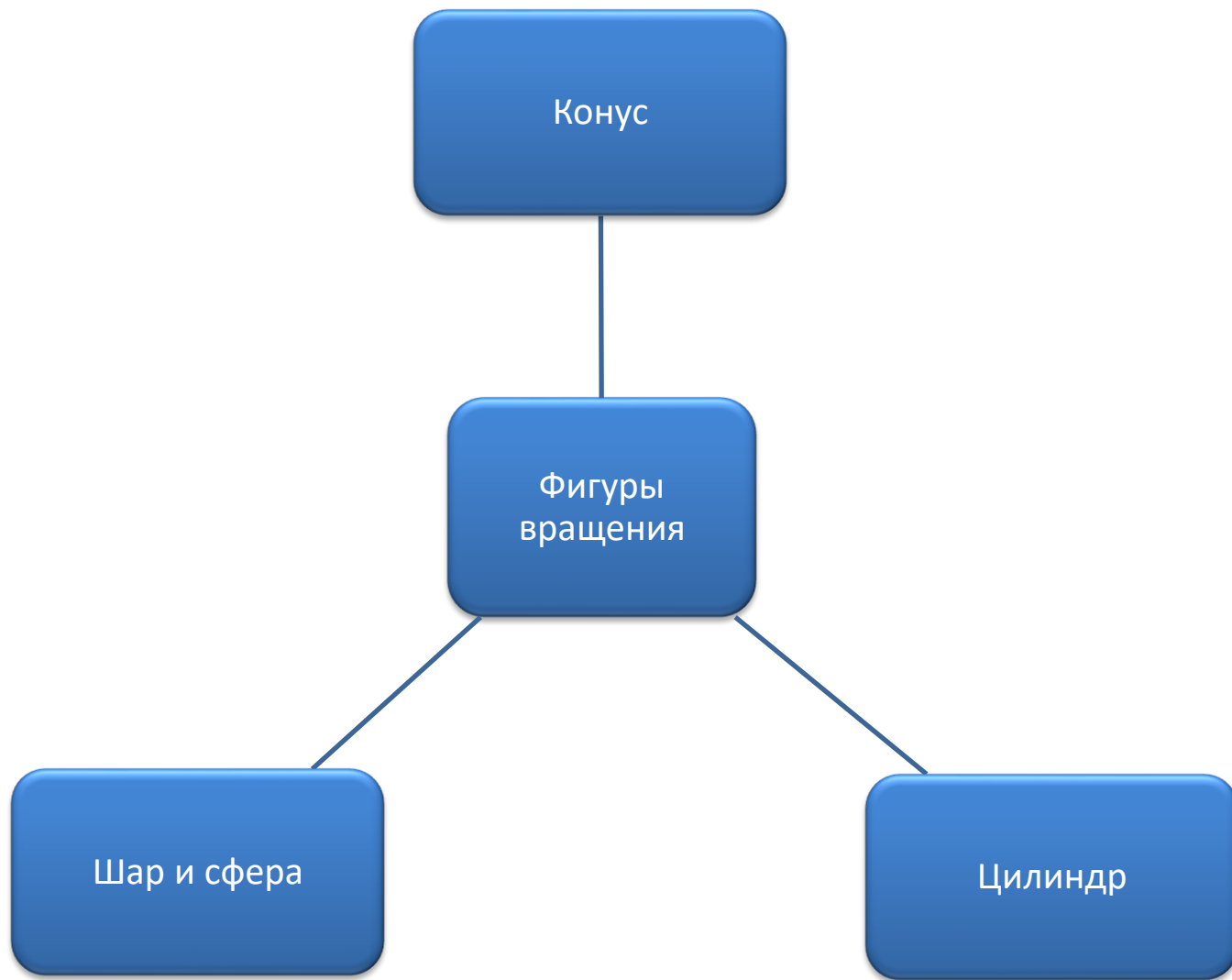
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой (PE).

ТЕТРАЭДР

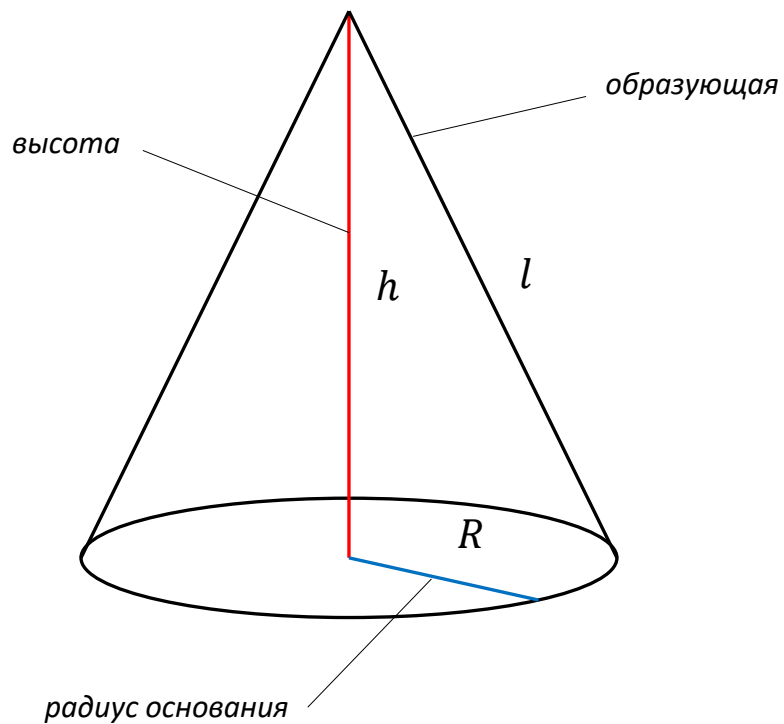
Тетраэдр – треугольная пирамида.

Правильный тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников.





КОНУС



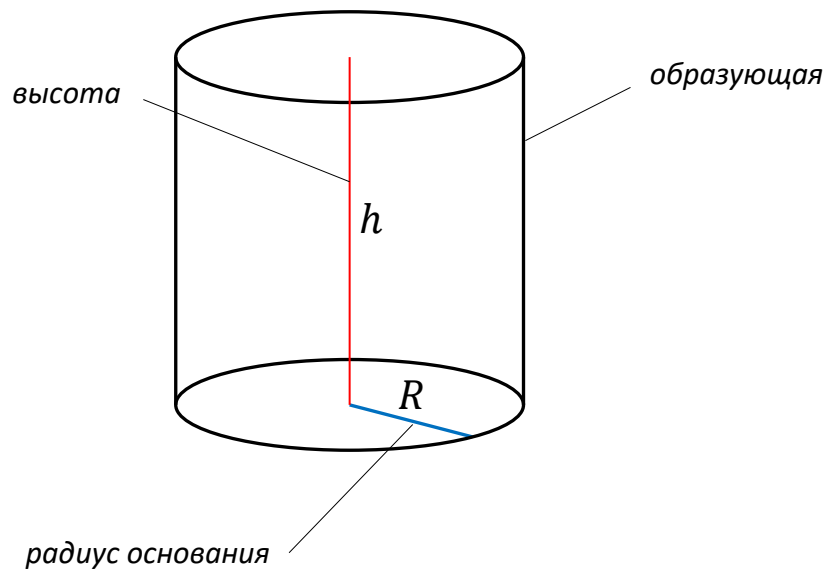
$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$V = \frac{1}{3} h S_{\text{осн}}$$

$$l^2 = h^2 + R^2$$

ЦИЛИНДР



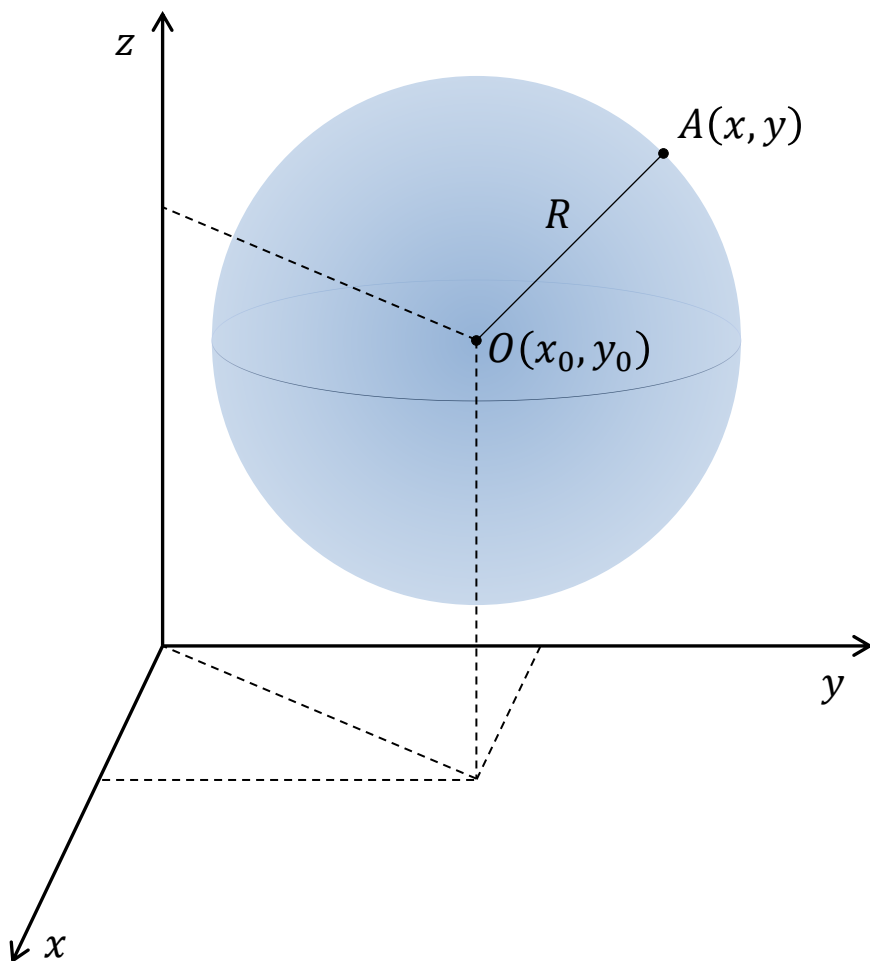
$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h$$

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$V = hS_{\text{осн}} = \pi R^2 h$$

ШАР И СФЕРА



Уравнение сферы

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

Площадь сферы

$$S = 4\pi R^2$$

Объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$



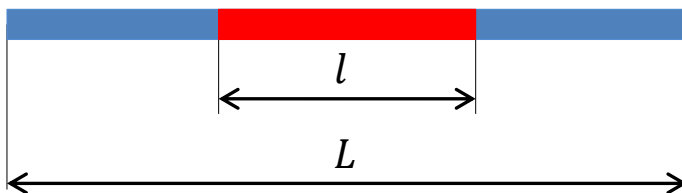
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов n , образующих полную группу:

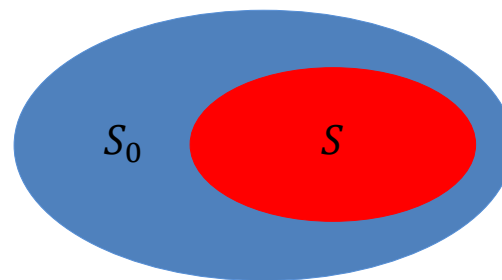
$$P(A) = \frac{m}{n}, 0 \leq P(A) \leq 1$$

- Вероятность невозможного события равна нулю.
- Вероятность достоверного события равна единице.

Геометрическая вероятность — вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.):



$$P = \frac{l}{L}$$



$$P = \frac{S}{S_0}$$

ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Несовместные события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, если наступление одного из них является достоверным событием:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

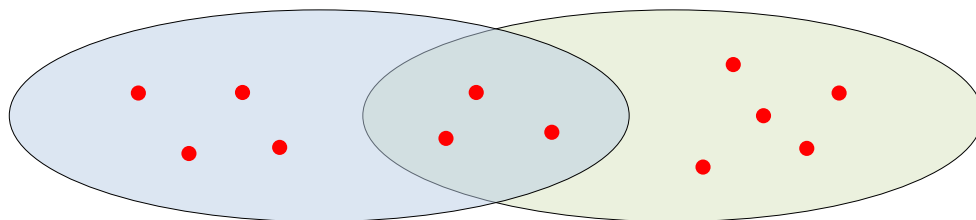
$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Событие В называют независимым от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БЕЙЕСА

Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

Формула Бейеса

(для вычисления вероятности гипотезы, при условии, что событие A наступило)

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)}$$

ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Вероятность того, что событие А произойдет m раз при n испытаниях:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

p – вероятность появления события А при одном испытании

$$q = 1 - p$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}$$